Réflexion sur l'optimalité des contrats d'assurance

par Sandrine Spaeter

Cahier de recherche 98-10
Mai 1998

ISSN : 1206-3290

L'auteure remercie Christian Gollier, Louis Eeckhoudt, Patrick Roger, Patrick Descamps et les participants du séminaire DELTA/FFSA à Paris pour leurs commentaires avisés. Elle exprime également sa reconnaissance à Rémi Moreau, Martin Boyer et Georges Dionne pour leurs précieuses remarques.

Réflexion sur l'optimalité des contrats d'assurance

Sandrine Spaeter

Sandrine Spaeter est stagiaire post-doctorale à la Chaire de gestion des risques de l'École des Hautes Études Commerciales et au Centre de recherche sur les transports de l'Université de Montréal.

Réflexion sur l'optimalité des contrats d'assurance

Sandrine SPAETER*

Résumé Nous discutons de l'impact économique et technique de la contrainte d'assurance sur les types de partage de risque entre un assuré et un assureur. Nous montrons plus particulièrement que le fait de considérer des schémas d'indemnisation interdisant le versement de prestations supérieures à la valeur du sinistre ne remet pas en cause la Pareto-optimalité des contrats obtenus lorsque le coût marginal de l'assurance est strictement positif. En revanche, si les coûts administratifs de l'assureur ne sont composés que de coûts fixes, la sur-assurance peut, dans certains environnements à deux aléas positivement corrélés, constituer une meilleure solution. L'ensemble de l'étude est mené dans le cadre de la symétrie d'information.

Mots-clés: contrat d'assurance, contrainte d'assurance, Pareto-optimalité, sur-assurance.

Abstract This paper deals with the economic and technical impact of the insurance constraint on the optimal insurance contracts. We show that restricting the set of admissible indemnity functions to those that do not allow for indemnities larger than the damage does not invalidate the Pareto-optimality of the policies obtained with a strictly positive marginal cost of insurance. Besides, if the administrative costs borne by the insurer only comprise fixed costs, over-insurance may be a better solution in some environments with two positively correlated risks. This study takes place in an economy without information asymmetry.

Keywords: Insurance contracts, insurance constraint, Pareto-optimality, over-insurance.

*Stagiaire post-doctorale à la Chaire de gestion des risques, HEC Montréal et au CRT, Université de Montréal. L'auteure remercie Christian Gollier, Louis Eeckhoudt, Patrick Roger, Patrick Descamps et les participants du séminaire DELTA/FFSA à Paris pour leurs commentaires avisés. Elle exprime également sa reconnaissance à Rémi Moreau, Martin Boyer et Georges Dionne pour leurs précieuses remarques.

1 Introduction

Les mécanismes de l'assurance doivent permettre aux agents qui le souhaitent d'éliminer tout ou partie des risques qu'ils supportent, moyennant le paiement d'une prime d'assurance. Du fait même du principe de l'assurance, il apparaît naturel de supposer que les indemnités versées en cas de sinistre ne sont jamais négatives, autrement dit que l'assuré n'est jamais acheteur de risque. Ce rôle d'acheteur incombant en général à l'assureur, il semble encore raisonnable de supposer que l'assureur ne vend pas de risque : les indemnités ne sont jamais supérieures à la valeur de la perte observée, estimée ou déclarée. Dans la littérature propre à la théorie de l'assurance, ces deux propriétés sont explicitement prises en compte dans la contrainte d'assurance. En notant X le risque assurable et $I(X)$ la fonction d'indemnisation, cette contrainte s'exprime de la manière suivante : $0 \leq I(X) \leq X$. Mais le fait de la prendre en considération dans les formalisations du partage de risque restreint l'ensemble des fonctions d'indemnisation admissibles comme solution et peut remettre en cause la Pareto-optimalité des contrats d'assurance obtenus[1].

Concernant la possibilité de sur-assurance en pratique, de tels contrats sont proposés sur les marchés IARD. Par exemple, au Québec certains contrats d'assurance-automobile offrent une indemnisation “valeur à neuf” en cas de dommage nécessitant la mise au rebut du véhicule ou en cas de vol[2]. En France, les assurés ont la possibilité de contracter des mutuelles qui, dans le domaine de la santé, paient plus que le montant total du dommage (soins, hospitalisation, convalescence, ...)[3]. Plus généralement, les lois qui régissent la responsabilité civile permettent également une forme de sur-compensation dans la mesure où la victime est en droit de demander (et de toucher) une somme plus importante que la valeur de son bien détérioré par un tiers par exemple.

Gollier (1987a) montre que des indemnités négatives ne sont réalistes que dans certaines situations peu cohérentes avec la réalité. Cet article constitue un travail

1. Un contrat est optimal au sens de Pareto s'il n'en existe pas un autre qui améliore la situation d'au moins un agent sans détériorer celle des autres.

2. Cette clause, offerte pour les deux années qui suivent l'achat du véhicule neuf, exclut toute prise en compte de la dépréciation due aux mécanismes des marchés et de l'usure propre à la conduite de l'assuré.

3. Ces contrats correspondent à de la sur-assurance si on les replace dans le contexte de l'utilité indépendante des états de la nature. Pour une étude de l'assurance-maladie dans le cadre des utilités dépendant des états, *cf.* Cook-Graham (1977).

complémentaire à son étude dans la mesure où nous nous intéressons à l'hypothèse d'indemnités au plus égales à la valeur de la perte dans des économies avec symétrie d'information. Plus précisément, nous présentons une vue d'ensemble des résultats de la littérature et discutons, à chaque fois que ceci s'avère nécessaire, l'impact de cette hypothèse sur la forme des contrats d'assurance obtenus. Dans la suite, nous désignerons cette dernière par *contrainte supérieure d'assurance*. Notre étude est menée dans le cadre de l'utilité espérée et prend en compte différentes structures de coûts administratifs de l'assureur[4] (constants, linéaires, convexes, concaves). L'un des résultats importants tient à la Pareto-optimalité possible de la sur-assurance en présence de coûts concaves. Les économies d'échelle générées par une telle structure de coûts étant la propriété la plus cohérente avec les marchés d'assurance de dommages, nous nous appliquons à démontrer dans quelles situations précises un tel optimum peut être atteint.

La seconde section présente l'intérêt économique et technique de la contrainte supérieure d'assurance. Dans la troisième section, nous abordons l'optimisation dans un environnement à un seul risque. La quatrième section est consacrée aux environnements à deux risques.

2 L'intérêt économique et technique de la contrainte

Dans le cadre de l'utilité espérée, Gollier (1987a) montre que la contrainte de non négativité des indemnités remet rarement en cause la Pareto-optimalité des polices d'assurance solution de l'optimisation. Peut-on en dire autant de la contrainte supérieure d'assurance ? En d'autres termes, si l'on relâche l'hypothèse selon laquelle les indemnités versées ne peuvent être supérieures à la valeur de la perte (déclarée ou observée), ne peut-on trouver des contrats de sur-assurance qui constitueraient de meilleures solutions que celles obtenues jusque là ?

Dans la littérature, la contrainte supérieure est souvent explicite et sa justification relève des problèmes d'asymétries d'information : elle permet d'éliminer les incitations à la destruction, génératrice de profit monétaire positif pour l'assuré s'il bénéficiait d'une sur-assurance. Dans la pratique, l'assurance partielle est souvent utilisée sur les marchés d'assurance de dommages comme moyen de lutte contre la

4. Les coûts administratifs englobent l'ensemble des frais de l'assureur hormis les indemnités.

fraude. Les franchises sur les marchés IARD constituent sans doute l'exemple le plus éloquent. Mais ceci n'implique pas que les franchises constituent le meilleur moyen de lutte. Au vu des travaux de Boyer (1997, 1998), Bond et Crocker (1997) et Mookherjee et Png (1989) ces types de contrats peuvent être dominés par des polices qui proposent une sur-indemnisation pour certains montants de sinistre [5]. Par ailleurs, comme nous l'avons souligné dans l'introduction, des contrats de sur-assurance existent sur les marchés. Nous avons cité le cas de l'assurance "valeur à neuf" [6] des automobiles au Québec, de l'assurance-maladie en France ainsi que de la responsabilité civile. Nous pouvons encore évoquer l'assurance valeur à neuf dans le bâtiment ainsi que les polices que certaines compagnies [7] offrent à des clients importants et qui stipulent également le versement de prestations supérieures au véritable montant des dommages (et indépendantes du montant initialement assuré !).

Ainsi, si le risque moral constitue la première explication de l'assurance partielle (Dionne, 1982), la fraude, qui est une forme particulière de risque moral, ne peut justifier à elle seule la présence de la contrainte supérieure d'assurance dans les modélisations des problèmes d'assurance. *A fortiori*, une telle explication n'est plus pertinente dans un contexte, que nous retenons ici, où toute information est commune aux deux parties. Par ailleurs, certains résultats obtenus en présence de symétrie d'information ne constituent plus des solutions optimales lorsqu'on fait intervenir les problèmes de risque moral. Il est alors utile d'expliquer autrement l'omniprésence de la contrainte supérieure d'assurance dans la plupart des modélisations. Cette explication tient plutôt à des considérations d'ordre technique.

Rappelons le problème standard d'optimisation du partage de risque. L'agent qui cherche à s'assurer supporte un risque de sinistre sur un bien matériel, caractérisé par une variable aléatoire X à valeurs continues dans un intervalle borné $[0, T]$. La richesse initiale certaine de l'individu est notée w, $w \in R^{*+}$. Ses préférences sont représentées par une fonction d'utilité de Von Neumann et Morgenstern, strictement croissante et strictement concave : l'agent est riscophobe au sens de Arrow-Pratt. L'assureur se comporte comme un agent neutre au risque et évolue sur un marché d'assurance concurrentiel, de telle sorte que la prime d'assurance est simplement

5. Cette sur-assurance peut être optimale pour des petits sinistres ou pour les plus importants selon que l'assureur est en mesure de s'engager ou non pour une politique d'audit donnée.

6. *Cf.* Bujold-Dionne-Gagné (1997) pour une étude économétrique de l'impact de tels contrats sur la fraude à l'assurance.

7. Les assurances AEtna proposent de tels contrats appelés *assurance pleine valeur à neuf*. La compagnie CHUBB offre également ce style de police (contrat *Masterpiece*).

égale à la valeur actuarielle des indemnités et des coûts administratifs. Supposons que la fonction d'indemnisation, notée $I(X)$, vérifie la contrainte d'assurance. Le programme de maximisation s'écrit alors

$$\begin{aligned}
&\max_{I,\mathcal{P}} E_P \left[U \left(w - \mathcal{P}(I) - X + I(X) \right) \right] \qquad (1)\\
&\text{sous les contraintes}\\
&\begin{cases} \mathcal{P}(I) = E_P \left[I(X) + c(I(X)) \right] \\ 0 \leq I(X) \leq X \end{cases},
\end{aligned}$$

où $c(.)$ est la fonction de coûts administratifs[8] et P la loi associée à X. Ce problème d'optimisation sous contraintes est de dimension infinie puisque la variable de décision est une fonction, $I(X)$, qui dépend d'une variable aléatoire continue, X. Sa résolution nécessite alors des techniques adaptées telles que le contrôle optimal (Raviv, 1979 ; Gollier, 1987b) ou le calcul des variations (Arrow, 1963 ; Huberman-Mayers-Smith, 1983). Une approche alternative consiste à tenir compte des caractéristiques topologiques de l'ensemble sur lequel l'optimisation est faite (Spaeter-Roger, 1997). La contrainte d'assurance est essentielle dans l'ensemble de ces démarches car elle permet de définir un ensemble de fonctions admissibles dont les propriétés de convexité et de fermé sont particulièrement appréciables dans le cadre de l'optimisation en dimension infinie.

L'approche de Spaeter-Roger a permis d'établir une typologie des contrats d'assurance optimaux en fonction de la structure des coûts administratifs aussi bien dans un monde à un seul risque assurable que dans un environnement à deux sources de risque. Aussi, retiendrons-nous cette approche dans la suite afin de conserver un cadre d'analyse cohérent tout au long de l'étude.

3 La contrainte dans les modèles à un risque

L'objet du présent article n'étant pas d'entrer dans des considérations techniques, certaines étapes de la modélisation sont volontairement omises lorsqu'elles n'entravent pas la clareté de l'exposé. Dans le cadre d'analyse établi par Spaeter-Roger

8. Elle est croissante, continue et deux fois différentiable. Dans notre analyse, ces coûts sont individuels en ce sens qu'ils se rapportent au seul assuré concerné.

(1997) le programme de maximisation (1) génère les conditions de premier ordre suivantes[9] :

$$\begin{cases} (i) \quad I^*(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ [1 + c'(0)]\, E_P\left[U'\left(\theta(I^*, X)\right)\right] \geq U'(w - \mathcal{P}(I^*) - x) \\ (ii) \quad I^*(x) = x \ \Leftrightarrow \ [1 + c'(x)]\, E_P\left[U'\left(\theta(I^*, X)\right)\right] \geq U'(w - \mathcal{P}(I^*)) \\ (iii) \quad 0 < I^*(x) < x \ \Leftrightarrow \ [1 + c'(I^*(x))]\, E_P\left[U'\left(\theta(I^*, X)\right)\right] = U'(\theta(I^*, x)) \end{cases} \tag{2}$$

où $\theta(I^*, X)$ est la richesse finale aléatoire de l'assuré évaluée en I^*. Dans chaque expression, le terme de gauche correspond au coût marginal de l'assurance pour un montant de perte x donné et le terme de droite au bénéfice marginal. De (2.iii) on obtient (Spaeter (1997a)) :

$$I^{*\prime}(x) = \frac{U''(\theta(I^*, x))}{U''(\theta(I^*, x)) - c''(I^*(x))E_P\left[U'\left(\theta(I^*, X)\right)\right]}, \ \forall x > D^* / 0 < I^*(x) < x \tag{3}$$

Cette équation permet de déterminer l'évolution de la perte nette de l'agent riscophobe, égale à $\delta^*(x) = x - I^*(x)$, pour chaque montant de sinistre partiellement couvert sachant que l'assureur est neutre au risque. Le scalaire D^* est le niveau optimal de la franchise : il est strictement positif lorsque les coûts administratifs sont strictement croissants avec les indemnités, nul sinon (Raviv, 1979 ; Spaeter-Roger, 1997).

3.1 Le cas de l'assurance non coûteuse

Le terme "assurance non coûteuse" fait référence à un coût marginal nul (coûts constants). Ces coûts constants peuvent être considérés comme un coût d'entrée sur le marché de l'assurance dû par l'agent, quel que soit le contrat d'assurance qu'il choisira *in fine*. Supposons que l'agent entre sur le marché d'assurance et qu'il n'existe aucun coût variable. Le contrat optimal présente alors de l'assurance totale puisque la prime d'assurance est actuarielle : $I^{*\prime}(x) = 1$ et $D^* = 0$. Ce résultat connu est associé aux travaux de Borch[10] (1960) et de Mossin (1968). Ainsi, si la contrainte supérieure d'assurance est saturée dans ce cas précis, la solution est tout de même

9. L'optimisation a été faite sur un espace vectoriel normé de fonctions d'indemnisation continues.

10. Borch traite également le cas d'un assureur riscophobe (*cf.* aussi Moffet, 1979).

un optimum de Pareto[11]. Elle égalise le coût marginal et le bénéfice marginal de l'assurance en tout point et elle correspond au cas particulier où la solution en coin coïncide avec la solution du problème non contraint.

3.2 Le cas de l'assurance coûteuse

L'assurance coûteuse fait référence à des coûts administratifs strictement croissants avec les indemnités : le coût marginal de l'assurance est strictement positif. La forme de la fonction d'indemnisation pour les sinistres supérieurs à la franchise[12] est alors déterminée par la forme des coûts (linéaires, convexes, concaves).

Lorsque les *coûts administratifs* sont *linéaires*, la prime d'assurance est égale à la valeur actuarielle du contrat chargée par un coefficient strictement positif. La référence dans ce contexte est l'article de Arrow (1963) qui montre que la fonction d'indemnisation optimale correspond à une franchise ferme avec remboursement au premier franc au-delà: $I^{*\prime}(x) = 1$, $\forall x > D^* > 0$. La contrainte supérieure d'assurance n'est jamais saturée à l'optimum et un tel contrat est Pareto-optimal.

Considérons maintenant des *coûts convexes*. Là encore, le résultat est immédiat et l'équation (3) génère les résultats suivants : $0 < I^{*\prime}(x) < 1, \forall x > D^*$ si $c''(.) > 0$. A l'optimum, la fonction présente de la coassurance à droite d'une franchise du fait de la croissance du coût marginal : la contrainte d'assurance n'est jamais saturée et ce contrat est Pareto-optimal.

Le cas le plus intéressant tient à *la concavité des coûts*, premièrement parce que la fonction d'indemnisation peut *a priori* décroître ($I^{*\prime}(x) < 0$), deuxièmement parce que l'introduction de coûts concaves ne garantit plus toujours les conditions suffisantes de l'optimisation et enfin parce que la concavité constitue l'hypothèse la plus cohérente avec la réalité des marchés d'assurance de dommages. A titre d'illustration, il semble en effet raisonnable de supposer que la prise en charge d'un dossier sinistre se référant à deux entrepôts identiques sinistrés coûtera moins cher à l'assureur que s'il avait à traiter séparément le cas de chaque entrepôt (en supposant qu'ils étaient sujet au même risque). De plus, les compagnies d'assurance et de

11. Les conditions suffisantes sont trivialement vérifiées lorsque la prime d'assurance est actuarielle.

12. Une franchise strictement positive est toujours optimale car l'assuré riscophobe préfère un report d'indemnités des petits sinistres vers les plus élevés à prime d'assurance donnée.

réassurance ne seraient pas en mesure de couvrir les risques importants à des primes raisonnables si leurs coûts étaient convexes par exemple.

Les deux premières constatations sont liées : si une forte concavité est à l'origine de conditions suffisantes non vérifiées, alors cette concavité importante a également de fortes chances de générer une pente de la fonction d'indemnisation négative. Ce dernier cas est exclu par Spaeter (1997a) qui montre que s'il existe une solution, elle est toujours non décroissante[13]. Finalement, s'il existe une solution lorsque les coûts sont concaves, elle vérifie d'après (3): $I^{*\prime}(x) > 1,\ \forall x > D^*$ tel que $0 < I^*(x) < x$. Le contrat d'assurance optimal présente une franchise évanescente, expliquée par les économies d'échelle générées par les coûts concaves : la franchise disparaît progressivement au fur et à mesure que le montant des dommages augmente. Aussi, peut-il *a priori* exister un montant de sinistre à partir duquel l'assurance est complète. L'assuré n'aurait-il alors pas préféré une sur-assurance pour ces niveaux de perte, sur-assurance rendue impossible du fait de la contrainte supérieure d'assurance ? Intuitivement, la réponse est négative lorsqu'il n'existe qu'un seul risque assurable. Si l'assurance est coûteuse, l'agent n'a pas intérêt à demander de la sur-assurance car il en paierait le prix dans la prime d'assurance et la variabilité du risque qu'il détiendrait *ex post* serait alors accrue par rapport à l'assurance totale :

Proposition 1 *Lorsque les fonctions d'utilité sont indépendantes des états de la nature et que le coût marginal de l'assurance est strictement positif, l'assurance totale (voire la sur-assurance) n'est jamais compatible avec l'optimum s'il n'existe qu'un seul risque dans l'économie.*

Finalement, dans un monde à un risque sans asymétrie d'information les contrats d'assurance obtenus suite à l'optimisation sous contraintes sont Pareto-optimaux lorsqu'on associe à la proposition 1 les conclusions établies par Gollier (1987a) et que les utilités ne dépendent pas des états de la nature[14].

13. Dans le cadre de coûts très concaves, l'assurance nulle peut alors constituer un optimum local, ce qui correspond à l'une des solutions en coin habituellement observées lorsque le problème d'optimisation est non convexe.

14. Pour l'analyse se rapportant aux fonctions d'utilité dépendantes des états, voir par exemple Cook-Graham (1977). Voir aussi Dionne (1982) pour une analyse du risque moral dans le cadre des utilités dépendant des états.

4 La contrainte dans les modèles à deux risques

Dans cette section, outre le risque X l'agent supporte encore un risque Y, non assurable[15]. L'assureur propose un contrat $(J(X), \mathcal{P}(J))$ pour le seul risque X et la richesse finale aléatoire de l'assuré s'écrit : $\xi(J, X, Y) = w - X - Y - \mathcal{P}(J) + J(X)$. Trois hypothèses alternatives quant à la relation entre X et Y peuvent être retenues : Y et X 1) sont indépendants, 2) présentent une dépendance négative, 3) présentent une dépendance positive. La littérature propose plusieurs approches différentes du problème de l'assurance dans de tels contextes et, à ce sujet, il est utile de différencier les travaux des années quatre-vingts (Mayers-Smith, 1983 ; Doherty-Schlesinger, 1983a,b ; Turnbull, 1988 ; Briys-Kahane-Kroll, 1988) de ceux qui se sont développés après 1990 (Eeckhoudt-Kimball, 1992 ; Eeckhoudt-Gollier, 1992 ; Briys-Viala, 1995 ; Gollier, 1996 ; Spaeter, 1997b) et qui font appel au concept de prudence (Kimball, 1990).

Considérons tout d'abord les cas 1) et 2). Lorsque X et Y présentent une dépendance négative, le risque non assurable Y joue le rôle d'un “réducteur” de risque puisqu'une mauvaise réalisation pour X (sinistre élevé) est accompagnée d'une bonne réalisation pour Y (sinistre faible ou nul). La présence de Y réduit la variabilité de la richesse finale de l'agent et celui-ci demande alors une assurance plus faible pour X : compte tenu des conclusions de la section précédente, la contrainte supérieure d'assurance n'est jamais saturée. Si Y est indépendant de X, la richesse finale de l'agent est, cette fois, plus risquée. Mais à l'optimum, il ne modifie pas sa demande d'assurance pour X sachant que les réalisations de Y ne dépendent pas de celles de X.

Ces deux résultats ont notamment été mis en évidence par Doherty-Schlesinger (1983a) dans un environnement où l'assuré n'a que le choix du taux de coassurance. Le cas 3) a également fait l'objet de leurs travaux mais la conclusion quant à la modification du comportement d'assurance de l'agent n'est pas unique. Lorsqu'il n'existe aucun coût administratif variable, la sur-assurance constitue toujours la meilleure solution : l'assuré cherche à se prémunir indirectement contre le risque Y pour lequel il n'existe pas de marché d'assurance. En revanche, dans le cas de coûts proportionnels aux indemnités, l'agent riscophobe peut préférer soit une diminution de sa couverture dans la mesure où cette baisse génère une baisse des coûts supportés en espérance dans la prime d'assurance, soit une augmentation de la demande

15. Par exemple, Y peut correspondre à un risque de bas revenu dû à une période de chômage ou à un risque de pertes d'exploitation d'une entreprise.

d'assurance[16].

En fait, la seule prise en compte de l'aversion au risque n'est plus suffisante dans un tel contexte pour caractériser précisément le comportement d'assurance de l'agent lorsque les deux risques sont positivement corrélés. La prise en compte de la notion de prudence[17] devient nécessaire. Par exemple, un agent prudent peut chercher à se prémunir contre le second risque en demandant plus de couverture pour l'aléa assurable même si le coût marginal de l'assurance est positif.

Notons $F(x)$ la fonction de répartition de X avec $f(x) > 0$ pour tout x. Y prend des valeurs continues dans l'intervalle borné $\left[\underline{y}, \overline{y}\right]$ avec $\underline{y} < 0$ et $\overline{y} > 0$. Sa distribution cumulée conditionnelle à un x donné est notée $G(y/X = x)$ et est deux fois différentiable en tout x et tout y. Y est positivement corrélé avec X et correspond à un accroissement de risque à moyenne constante[18] au sens de Rothschild-Stiglitz (1970). Le programme d'optimisation est similaire à (1) à ceci près que la fonction objectif s'écrit :

$$\int_0^T \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} U\left(w - \mathcal{P}(J) - x - y + J(x)\right) dG(y/x) dF(x)$$

Les conditions nécessaires de premier ordre, après calculs et arrangements, peuvent être exprimées de la manière suivante[19] :

$$\begin{cases} (i)\ J^*(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + c'(0))\, E_P E_Q \left[U'(\xi(J^*, X, Y))\right] \geq \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} U'(\xi(J^*, x, y)) dG(y/x) \\ (ii)\ J^*(x) = x \Leftrightarrow (1 + c'(x))\, E_P E_Q \left[U'(\xi(J^*, X, Y))\right] \leq \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} U'(\xi(J^*, x, y)) dG(y/x) \\ (iii)\ 0 < J^*(x) < x \Leftrightarrow (1 + c'(J^*(x)))\, E_P E_Q \left[U'(\xi(J^*, X, Y))\right] = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} U'(\xi(J^*, x, y)) dG(y/x) \end{cases} \tag{4}$$

16. Si le taux de chargement de la prime n'est pas trop élevé par exemple, le cas limite étant l'assurance totale, voire la sur-assurance.

17. La prudence reflète la volonté d'un agent de se prémunir contre un risque qu'il n'a pu éliminer, grâce par exemple aux mécanismes de l'assurance. Elle fait référence au signe de la dérivée troisième de l'utilité dans la mesure où un agent riscophobe est prudent (respectivement non prudent, imprudent) si $U'''(.)$ est positif (respectivement nul, négatif).

18. Le fait de considérer cette forme particulière de dépendance est discuté dans la conclusion.

19. Pour les principales étapes de la preuve de ces conditions nous renvoyons à Spaeter (1997b, appendice B). P (respectivement Q) est la loi associée à X (respectivement à Y).

Ces conditions reflètent l'arbitrage pratiqué par l'assuré entre le coût marginal et le bénéfice marginal de l'assurance pour un sinistre x donné, sachant qu'il supporte également Y, non assurable. Le premier résultat issu du système (4) tient à l'optimalité d'une franchise strictement positive lorsque les coûts administratifs sont strictement croissants (Spaeter, 1997b). Notons cette franchise D_y^*. La pente de la fonction d'indemnisation optimale pour tout sinistre supérieur à D_y^* et partiellement couvert est alors définie de la manière suivante[20] :

$$J^{*\prime}(x) = \frac{A(x) + B(x)}{\mathcal{D}} \quad , \tag{5}$$

avec :

$$\begin{cases} A(x) = \int\limits_{\underline{y}}^{\overline{y}} U''(\xi(J^*, x, y))dG(y/x) \\ B(x) = -\int\limits_{\underline{y}}^{\overline{y}} \left[U'''(\xi(J^*, x, y)) \int\limits_{\underline{y}}^{y} G_x(t/x)dt \right] dy \\ \mathcal{D} = \int\limits_{\underline{y}}^{\overline{y}} U''(\xi(J^*, x, y))dG(y/x) - c''(J(x))E_P E_Q \left[U'(\xi(J^*, X, Y)) \right] \end{cases}$$

La pente de la fonction d'indemnisation est composée de deux termes à dénominateur commun : le premier, noté $A(x)/\mathcal{D}$, reflète l'impact de la structure des coûts sur $J^{*\prime}(x)$, tandis que le second, égal à $B(x)/\mathcal{D}$, reflète l'impact du comportement de prudence de l'assuré sur $J^{*\prime}(x)$. Leur dénominateur commun $\mathcal{D}$ est toujours strictement négatif pour des coûts constants, linéaires ou convexes. Supposons qu'il le soit également pour des coûts concaves[21] et retenons ici uniquement les cas où l'assurance totale, voire la sur-assurance, peut *a priori* constituer un optimum. Ces derniers font référence, pour la plupart, à un agent prudent. Pour $U'''(.) > 0$, on a :

$$c''(.) \leq 0 \;\Rightarrow\; J^{*\prime}(x) > 1 \qquad et \qquad c''(.) > 0 \;\Rightarrow\; J^{*\prime}(x) \lesseqgtr 1$$

L'interprétation de ces résultats est la suivante. Sachant que plus x est élevé plus y a des chances d'être élevé, un agent prudent va préférer plus d'assurance sur X pour les sinistres importants en vue de se prémunir simultanément contre une

20. L'équation (5) est obtenue en différenciant (4.iii) par rapport à y. Le numérateur du second terme dans (5) résulte d'une double intégration par partie. Par ailleurs, les propriétés de $G(./.)$ sont détaillées dans la preuve de la proposition 2 en appendice.

21. En fait, cette caractéristique est plus qu'une supposition arbitraire (*Cf.* Spaeter, 1987b).

mauvaise réalisation de Y. Ce résultat est valable quelle que soit la structure des coûts et est reflété par le signe positif de $B(x)/\mathcal{D}$ lorsque $U'''(.) > 0$: pour des coûts linéaires ou concaves[22], une franchise évanescente est toujours optimale ($J^{*\prime}(x) > 1$). Si l'agent est suffisamment prudent, un tel type de contrat peut également constituer une solution pour des coûts convexes : l'effet "prudence" fait plus que contrecarrer l'effet "coût marginal" croissant.
Dans de telles situations, nous sommes ramené à la discussion de la section précédente : sachant que les indemnités augmentent plus que la valeur du sinistre, n'existe-t-il pas un montant de perte à partir duquel tout sinistre est totalement couvert, voire sur-assuré ? Là encore, la réponse est négative du fait de la positivité du coût marginal :

Proposition 2 *Lorsque l'assuré supporte un second risque non assurable qui correspond à un accroissement de risque à moyenne constante de l'aléa assurable, l'assurance totale, voire la sur-assurance, n'est jamais optimale tant que le coût marginal est strictement positif.*

Finalement, lorsque l'assurance est coûteuse, la contrainte supérieure d'assurance n'est jamais saturée à l'optimum même si la meilleure stratégie d'un agent prudent consiste à demander une couverture plus élevée pour X en présence de Y. Les contrats obtenus sous contraintes sont Pareto-optimaux.

En revanche, contrairement au modèle à un risque, la sur-assurance peut constituer un optimum lorsqu'il n'existe aucun coût administratif. En effet, sachant qu'en présence du seul risque X l'assuré riscophobe opte pour de l'assurance totale, on peut s'attendre à ce que cet individu, s'il est encore prudent, cherche à sur-assurer X si son environnement est modifié suite à la prise en compte de Y. Toutefois, les conclusions diffèrent selon les hypothèses retenues et la conclusion de Doherty-Schlesinger (1983a) n'est finalement pas valable dans tous les contextes (*Cf.* Eckhoudt-Gollier, 1992 ; Briys-Viala, 1995 ; Gollier, 1996). La figure 1 présente trois exemples de simulation de partage de risque où la couverture optimale tend vers la pleine assurance.

22. Notons qu'en présence de coûts concaves, une franchise évanescente est également optimale si l'agent est non prudent ($U'''(.) = 0$), voire imprudent ($U'''(.) < 0$). Pour ce dernier cas, il faut que l'effet "coût marginal" soit plus important que l'effet "imprudence", ce qui se traduit par : $A(x)/\mathcal{D} > 1 - B(x)/\mathcal{D}$.

5 Conclusion

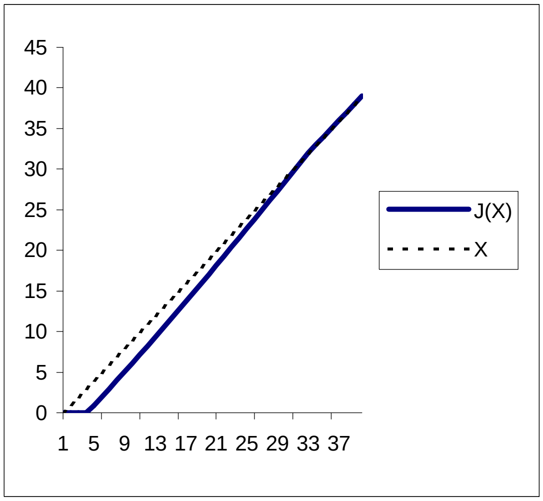
Nous avons présenté une vue d'ensemble des résultats de la littérature de l'assurance dans des environnements avec symétrie d'information. Nous avons notamment discuté de la pertinence de la contrainte supérieure d'assurance et de son impact sur les contrats Pareto-optimaux.

Lorsque l'assuré ne supporte qu'un seul risque, le contrat d'assurance résultant de l'optimisation de son utilité espérée sous la contrainte d'assurance est Pareto-optimal lorsque les coûts administratifs de l'assureur sont constants, linéaires ou convexes. Pour des coûts concaves, nous avons également montré que l'assurance totale n'est jamais compatible avec l'optimum malgré la décroissance du coût marginal. Ce résultat est important dans la mesure où l'hypothèse de concavité des coûts administratifs est bien plus intuitive que l'hypothèse de convexité, voire de linéarité. De plus, les coûts concaves sont à l'origine des franchises évanescentes, polices dont la structure laissait une place, jusqu'ici, à l'assurance totale, voire la sur-assurance.

Ces conclusions sont encore valables dans une économie à deux sources de risque, indépendantes ou non, lorsqu'il existe des coûts strictement croissants avec le niveau de l'indemnité. En revanche, la sur-assurance peut constituer une solution pour l'agent prudent lorsqu'il n'existe que des coûts fixes et que les deux aléas sont positivement corrélés. Ces derniers résultats ont été obtenus dans un contexte spécifique puisque le second aléa est un accroissement de risque à moyenne constante du premier. Aussi, si l'on considère, par exemple, un problème alternatif où l'aléa non assurable ne prend que des valeurs positives, la contrainte supérieure d'assurance peut-elle, *a priori*, également être saturée lorsque l'assurance est coûteuse, sachant que la valeur que l'assuré accorde à son bien est, dans ce contexte, toujours supérieure à celle retenue par l'assureur. L'étude de ce dernier point devra compléter l'analyse présente. Par ailleurs, nous nous sommes restreint à la maximisation de l'utilité espérée standard. Si, dans le cadre des coûts administratifs non linéaires, ce critère de décision est le seul usité dans la littérature jusqu'à présent, la linéarité des coûts a, en revanche, également été considérée dans des modèles avec utilité dépendant des états de la nature (Cook-Graham 1977 ; Dionne, 1982).

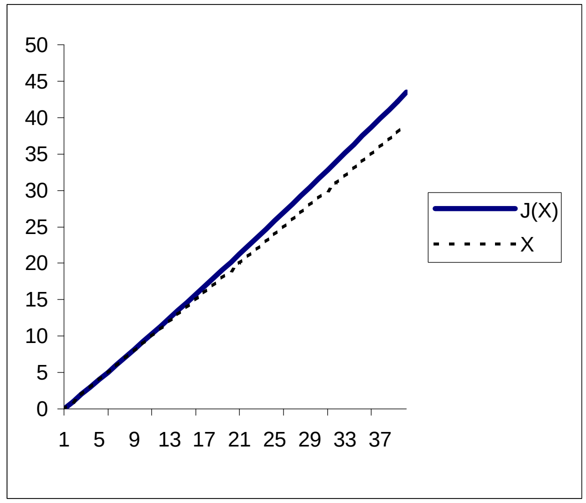
D'un point de vue pratique, il est tout à fait raisonable de supposer que les compagnies d'assurance supportent et des coûts fixes et des coûts variables. Par ailleurs, la présence de plusieurs sources de risque est une réalité en soi et la propriété de prudence semble être la plus naturelle, au même titre que la décroissance de l'aversion absolue au risque. Aussi, conclurons-nous en abondant dans le sens de Bujold-Dionne-Gagné (1997) et en émettant de sérieuses réserves quant à la pertinence des offres de sur-assurance par certaines compagnies, comme les polices d'assurance "valeur à neuf" ou encore certaines formes d'assurance-maladie.

Figure 1



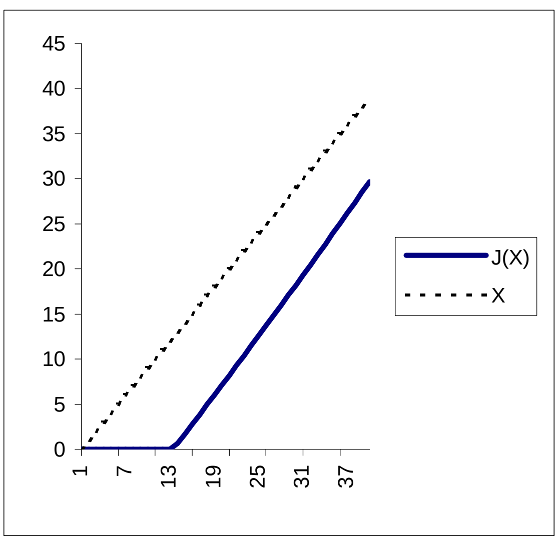
Coûts nuls avec la contrainte supérieure d'assurance

U=ln(richesse finale)
Y= rX avec r =+/-30%
Coûts =0



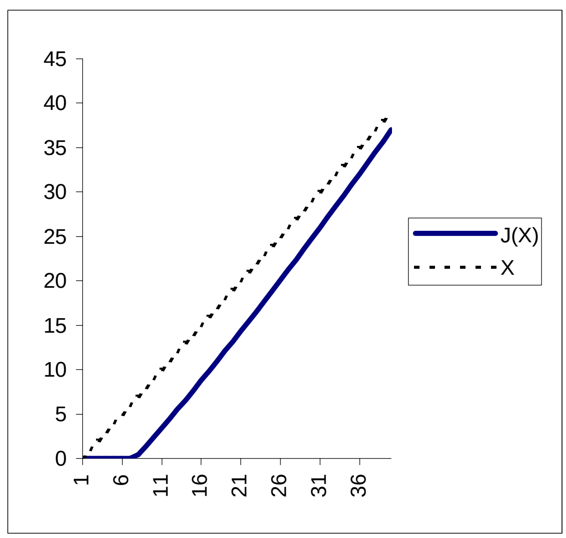
Coûts nuls sans la contrainte supérieure d'assurance

U=ln(richesse finale)
Y= rX avec r =+/-30%
Coûts =0



Coûts linéaires

U=ln(richesse finale)
Y= rX avec r =+/-30%
Coûts =0,1*J(X)



Coûts convexes

U=ln(richesse finale)
Y= rX avec r =+/-40%
Coûts =0,03*J(X)^(1,5)

APPENDICE

Preuve de la proposition 1

Considérons une fonction de coûts $c(.)$ continue, strictement croissante et deux fois différentiable. Soit (I^*, D^*) un maximum avec I^*, continue, qui vérifie :

$$\begin{cases} I^*(x) = 0, \forall x \leq D^* \\ \exists x_0 \in \,]D^*, T] \ / \ \max\limits_x I^* = I^*(x_0) \geq x_0 \end{cases}$$

Par construction, la richesse finale évaluée en x_0 est la plus élevée que l'agent puisse récupérer *ex post*. Avec $\delta^*(x) = x - I^*(x)$ et $U(.)$ concave, on a alors :

$$U'\left(w - \mathcal{P}(I^*) - \delta^*(x_0)\right) \leq E_P\left[U'\left(w - \mathcal{P}(I^*) - \delta^*(x)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow U'(w - \mathcal{P}(I^*) - \delta^*(x_0)) < (1 + c'(I^*(x_0)))\, E_P\left[U'(\theta(I^*, X)\right] \tag{6}$$

car $c'(.) > 0$ par hypothèse.
L'inégalité (6) est en contradiction avec l'optimalité de $I^*(X)$ (*cf.* Eq. (2.ii)) et x_0 ne peut être entièrement couvert, voire sur-assuré. ♦

Preuve de la proposition 2

La fonction de répartition $G(y/x)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \int\limits_0^y G_x(t/x)dt \geq 0, \ \forall y, \ \forall x \\ \int\limits_{\underline{y}}^{\overline{y}} G_x(y/x)dy = 0 \\ G_x(\overline{y}/x) = G_x(\underline{y}/x) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

où $G_x(./x)$ est la dérivée de $G(./x)$ par rapport à x.

La démonstration de la proposition 2 est analogue à la preuve de la proposition 1 lorsqu'on pose : $\widehat{U}(\theta(J^*, x)) = \int\limits_{\underline{y}}^{\overline{y}} U(\xi(J^*, x, y))dG(y/x), \ \forall x \in [0, T]$

avec : $\begin{cases} \theta(J^*, x) = w - P(J^*) - x + J^*(x) \\ \xi(J^*, x, y) = w - P(J^*) - x - y + J^*(x) \end{cases}$.

La fonction $\widehat{U}(.)$ présente les mêmes propriétés que la fonction $U(.)$. ♦

Références

[1] Arrow, K.J., 1963, «Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care», *American Economic Review* 53, 941-973.

[2] Bond, E.W. et K.J. Crocker, 1997, «Hardball and the Soft Touch: The Economics of Optimal Insurance Contracts with Costly State Verification and Endogenous Monitoring», *Journal of Public Economics* 63, 239-254.

[3] Borch, K., 1960, «The Safety Loading of Reinsurance Premiums», *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 43, 163-184.

[4] Boyer, M.M., 1997, «Contracting Under Ex-Post Moral Hazard, Costly Auditing and Principal Non-Commitment», miméo, HEC-Université de Montréal.

[5] Boyer, M.M., 1998, «Over-Compensation as a Partial Solution to Commitment and Renegotiation Problems: the Case of Ex-Post Moral Hazard», document de travail 98-04, Chaire de gestion des risques, HEC Montréal.

[6] Briys, E., Kahane, Y. et Y. Kroll, 1988, «Voluntary Insurance Coverage, Compulsory Insurance and Risky-Riskless Portfolio Opportunities», *Journal of Risk and Insurance* 4, 713-722.

[7] Briys, E. et P. Viala, 1995, «Optimal Insurance Design under Background Risk», document de recherche, Université de Montréal.

[8] Bujold L., Dionne, G. et R. Gagné, 1997, «Assurance valeur à neuf et vols d'automobile : une étude statistique», *Assurances*, avril, 49-62.

[9] Cook P.J. et D.A. Graham, 1977, «The Demand for Insurance and Protection: The Case of Irreplaceable Commodities», *Quarterly Journal of Economics* 91, 143-156 [repris dans Dionne/Harrington (Ed.), (1992), *Foundations of Insurance Economics*, Kluwer Academic Publishers, 206-219].

[10] Dionne G., 1982, «Moral Hazard and State-Dependent-Utility Function», *Journal of Risk and Insurance* 49, 405-422.

[11] Doherty, N.A. et H. Schlesinger, 1983a, «Optimal Insurance in Incomplete Markets», *Journal of Political Economy* 91, 1045-1054.

[12] Doherty, N.A. et H. Schlesinger, 1983b, «The Optimal Deductible for an Insurance Policy when Initial Wealth is Random», *Journal of Business* 56, 555-565.

[13] Eeckhoudt, L. et C. Gollier, 1992, *Les risques financiers : évaluation, gestion, partage*, Ediscience International.

[14] Eeckhoudt, L. et M. Kimball, 1992, «Background Risk, Prudence and the Demand for Insurance», dans G. Dionne (ed.), 1992, *Contributions to Insurance Economics*, Kluwer Academic Publishers, 239-254.

[15] Gollier, C., 1987a, «The Design of Optimal Insurance Contracts Without the Nonnegativity Constraint on Claims», *Journal of Risk and Insurance* 54, 312-324.

[16] Gollier, C., 1987b, «Pareto-Optimal Risk-Sharing with Fixed Costs per Claim», *Scandinavian Actuarial Journal* 13, 62-73.

[17] Gollier, C., 1996, «Optimum Insurance of Approximate Losses», *Journal of Risk and Insurance* 63, 369-380.

[18] Huberman, G., Mayers, D. et C.W.Jr. Smith, 1983, «Optimal Insurance Policy Indemnity Schedules», *Bell Journal of Economics* 14, 415-426.

[19] Kimball, M., 1990, «Precautionary Saving in the Small and in the Large», *Econometrica* 58, 53-73.

[20] Mayers, D. et C. Smith, 1983, «The Interdependence of Individual Portfolio Decisions and the Demand for Insurance», *Journal of Political Economy* 91, 304-311.

[21] Moffet, D., 1979, «The Risk Sharing Problem», *Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice* 11, 5-13.

[22] Mookherjee, D. et I. Png, 1989, «Optimal Auditing, Insurance and Redistribution», *Quarterly Journal of Economics* 104, 205-228.

[23] Mossin, J., 1968, «Aspects of Rational Insurance Purchasing», *Journal of Political Economy* 76, 553-568, [repris dans Dionne/Harrington (ed.), 1992, *Foundations of Insurance Economics,* 118-133].

[24] Raviv, A., 1979, «The Design of an Optimal Insurance Policy», *American Economic Review* 69, 84-96.

[25] Rothschild, M. et J.E. Stiglitz, 1970, «Increasing Risk I : a Definition», *Journal of Economic Theory* 2, 225-243.

[26] Spaeter, S., 1997a, «Optimal Insurance Policies When Prudence and Non-Linear Costs are Jointly Considered», document de recherche CREST n° 9713, Paris.

[27] Spaeter, S., 1997b, «Imperfect Estimation of the Loss and Non-Linear Costs : The Optimal Design of Insurance Contracts», document de recherche CREST n° 9714, Paris.

[28] Spaeter, S. et P. Roger, 1997, «The Optimal Design of Insurance Contracts : a Topological Approach», *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 22, 5-19.

[29] Turnbull, S., 1983, «Additional Aspects of Rational Insurance Purchasing», *Journal of Business* 56, 217-229.