L’importance de la procédure dans les choix de loterie

par Yves Alarie

Cahier de recherche 00-06
Mai 2000

ISSN : 1206-3290

Ce texte est une extension d'un chapitre de la thèse de doctorat de l’auteur. Il remercie le CRSH, le FCAR et le CRT pour leur support financier, Georges Dionne pour ses commentaires et Claire Boisvert pour son aide dans la préparation de la version finale.

L'importance de la procédure dans les choix de loterie

Yves Alarie

Yves Alarie est stagiaire post-doctoral au Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

Copyright ã 2000. École des Hautes Études Commerciales (HEC) Montréal.
All rights reserved in all countries. Any translation or reproduction in any form whatsoever is forbidden.
The texts published in the series Working Papers are the sole responsibility of their authors.

L’importance de la procédure dans les choix de loterie

Résumé

À l'aide d'une revue de littérature, nous expliquons les motivations qui ont entraîné la création de la théorie de l'espérance d'utilité. Nous montrons que le passage de cette théorie du rôle d'outil normatif à celui de problème de recherche fondamentale est la conséquence de l'arrivée de nombreux tests encore non expliqués. Par la suite nous discutons de la pertinence de considérer la procédure employée par le décideur comme étant le point important à la base des modèles.

Mots clés : Espérance d’utilité, tests, loterie, procédure.

Abstract

"The significance of the procedure in lottery choices"

Using a literature review we explain the motivations for the elaboration of expected utility theory. We show that the transformation of the role of this theory from being a normative tool to become a fundamental research problem is due to the numerous tests not yet explained. Then we discuss on the relevance of considering the procedure used by the decision maker to be the basic concept.

Keywords : Expected utility, tests, lottery, procedure.

1. Introduction

Ce article discute de la prise de décision en présence de risque. Nous montrons à l'aide d'une revue de littérature pourquoi la théorie de l'espérance d'utilité malgré son échec à expliquer les différents résultats obtenus dans les tests demeure encore aujourd'hui la base de plusieurs modèles alternatifs. Dans la section 3, nous donnons quelques exemples de modèles basés sur la procédure.

Ce genre de modèle s'oppose de façon drastique aux théories classiques de choix où l'axiomatique est construite entièrement à partir des variables (loteries) de base comme la théorie de l'espérance d'utilité.

On peut diviser la littérature théorique en deux parties. La préoccupation de la première est d'expliquer les faits tout en ayant une base mathématique plus faible que la seconde qui elle est plus préoccupée par l'axiomatique de la théorie que par son pouvoir de résolution. Etant donné qu'aujourd'hui encore aucun modèle ne parvient à expliquer tous les paradoxes les plus connus nous croyons que l'emphase devrait être mise sur la résolution plutôt que sur l'axiomatisation. C'est d'ailleurs la voie la plus naturelle en sciences où après avoir expliqué et donc compris les faits, on propose une étude plus profonde et rigoureuse du problème.

La théorie de l'espérance d'utilité a été employée à plusieurs reprises pour tenir compte du facteur risque dans des modèles économiques, financiers... Comme ces modèles sont complexes il est imprudent de conclure sur la véracité de la théorie de l'espérance d'utilité en se fiant à sa performance dans ces modèles. Par exemple, on utilise généralement cette théorie avec une fonction d'utilité concave dans les modèles classiques d'assurance. Cependant en utilisant un modèle où les faibles probabilités sont surestimées comme dans la *cumulative prospect theory* on peut générer les mêmes résultats (Wakker et al. 1997). Donc la manière d'introduire le risque ici est plutôt secondaire même si la notion de risque est essentielle. Ce genre d'applications démontre que la forme de l'outil utilisé n'a pas d'importance et ne démontre d'aucune façon que la théorie d'espérance d'utilité est pertinente ou pas. Pour ce faire, il faut procéder à des tests plus directs. C'est pourquoi nous ne considérerons que les tests directs qui sont nommés les paradoxes à la théorie de l'espérance d'utilité parce qu'ils ont été faits dans le but de tester la pertinence de cette théorie.

2. Revue de la littérature

2.1 Avant 1930

Le premier paradoxe que l'on rencontre est le paradoxe de St-Petersbourgh qui dit essentiellement qu'une loterie où l'espérance mathématique des gains est infinie n'a pas une valeur infinie pour la plupart des gens. La solution proposée par Daniel Bernoulli est de considérer l'espérance mathématique de la valeur de la loterie où les montants sont transformés à l'aide d'une fonction concave ce qui diminue leurs valeurs relatives lorsqu'ils augmentent. Cette solution apparaît des plus acceptable mais il faut bien remarquer que nous sommes en présence de montants infinis.

2.2 Années 30–60

Les économistes ont commencé à s'intéresser aux choix avec risques durant les années 1930. Comme le fait remarquer Arrow (1951), il existait une multitude d'approches difficilement compréhensibles pour celui qui ne connaissait pas une très vaste littérature. Les deux problèmes principaux étaient de déterminer la façon de décrire les conséquences et d'ordonner les effets des actions. Pour le premier problème il y avait deux clans: ceux qui pensaient qu'on devait employer exclusivement le langage des probabilités et les autres qui croyaient que quelques fois on devait ajouter d'autres principes supplémentaires. De plus, la première catégorie discutait de l'interprétation qu'on devait donner aux probabilités; était-ce une fréquence ou un degré de crédibilité etc... La seconde catégorie qui voulait remplacer ou complémenter la première comprenait des économistes comme Keynes, Knight... et des statisticiens comme Neyman, Pearson, ce qui ne simplifiait en rien la discussion.

Pour le second problème, celui d'ordonner les effets des actions et donc d'ordonner les probabilités, les économistes comme Hicks, Marshall et Tinter discutaient de la pertinence de comparer les distributions seulement par leur moyenne et écart type ou d'ajouter d'autres paramètres. Donc à ce moment le problème le plus urgent à régler était de ramener toute ces discussions à un centre commun. De plus, l'intérêt principal d'introduire le risque dans les modèles était le marché des denrées à terme et celui des paiements monétaires dans les périodes futures. Ces problèmes de marché comme on le remarque, ne sont pas des problèmes fondamentaux de la théorie de la décision mais plutôt des applications de cette théorie. Donc, les problèmes étudiés ainsi que le besoin de rallier les différents intervenants dictaient le genre de théorie désirée. C'est-à-dire une théorie avec une base forte du point de vue mathématique dont le pouvoir explicatif n'avait pas besoin d'être très élevé. Ramsey (1931) a été le premier à proposer ce genre de théorie avec axiomes. Par la suite Von Neumann et Morgenstern (1953), qui avaient besoin d'une théorie du risque comme base pour la théorie des jeux, ont eux aussi suivi la route la plus sûre car leur préoccupation réelle n'était pas de développer une théorie de la décision mais bien une théorie pour expliquer l'interaction entre les différents agents. Pour eux le risque n'était qu'un item parmi d'autres. Ils ont donc choisi une théorie axiomatique simple et ont récupéré l'explication de Bernoulli du paradoxe de St-Petersbourgh. Allais (1979) a nommé ce genre de modèle néo-Bernoullien.

Savage (1958) a continué le développement de la théorie en la précisant de plus en plus et en permettant l'emploi de probabilités subjectives. Debreu (1959) ainsi que Radner (1968) les ont utilisées dans des modèles d'équilibre général tandis que Markowitz (1959) les a utilisées pour les marchés monétaires et pour développer la théorie du choix de portefeuille.

Comme nous venons de le voir, à cause de l'urgence de rallier les discussions et les priorités des chercheurs économistes du temps, nous avons assisté à la naissance, non pas d'une théorie axée sur la prise de décision réelle des agents mais à une théorie très consistante et cette dernière semblait très satisfaisante pour les chercheurs du temps. Cependant, il existe une exception à cette règle, Maurice Allais (1952). Ce dernier, contrairement aux Néo-Bernoulliens, mettait l'emphase sur la valeur psychologique associée à chaque loterie ce qui se voulait une explication aux deux paradoxes connus soit le paradoxes d'Allais et celui de St-Petersbourgh. Un exemple du paradoxe d'Allais où l'on doit choisir entre les loteries 1 et 2 et par la suite entre les loteries 3 et 4 est le suivant. Soit les loteries :

1) P = 0 x = 5 000 000 $
P = 1 x = 1 000 000 $
P = 0 x = 0 $

2) P = 0,1 x = 5 000 000 $
P = 0,89 x = 1 000 000 $
P = 0,1 x = 0 $

3) P = 0,9 x = 0 $
P = 0,1 x = 5 000 000 $

4) P = 0,89 x = 0 $
P = 0,11 x = 1 000 000 $

L'espérance d'utilité prédit les choix 1 et 4 ou encore 2 et 3 cependant le résultat le plus souvent obtenu lors de différentes expérimentations est 1 et 3. Ceci conduisit Allais à construire un test plus complet pour confirmer ou infirmer sa théorie. Malheureusement les résultats de cette étude ne furent publiés que 25 ans plus tard et ce retard, justifié par Allais, a été expliqué par le fait que ce problème n'était pas le plus important en économie pendant cette période.

2.3 Années 60 - 80

Durant les années 60-80, on assista à une progression de l'applicabilité de la théorie. Le premier outil d'importance fut l'introduction du coefficient d'aversion au risque par Arrow (1965) et Pratt (1964) qui fut plus tard raffiné par Ross (1981), Khilstrom (1980), Machina (1982). Le second outil est la définition de "plus risqué". Hanoch et Levy (1969) ainsi que Rothschild et Stiglitz (1970) ont largement contribué à développer ces définitions. Le premier outil permettait la comparaison entre individus tandis que le second permettait d'étudier la réaction d'un individu face à un changement de risque. Ces deux outils ainsi que la notoriété croissante des mathématiques en économie furent suffisants pour entraîner un flot de travaux dans les champs les plus divers tel que les décisions d'épargne, la recherche de travail, l'assurance, la consommation ainsi que pour les comportements des firmes dans différentes situations telles que le monopole, la compétition parfaite et les équilibres de marché... Pour des discussions de ces différentes applications voir Dionne (1988), Eeckhoudt et Gollier (1992).

Pendant ce temps, mais d'une façon beaucoup plus timide, quelques tests à la théorie de Von Neumann et Morgenstern furent faits. MacCrimon (1968) proposa un test qui englobe comme cas particulier le paradoxe d'Allais et connu sous le nom de *common consequence effect*. Ce test comprend un montant sûr "a", une loterie P avec des montants plus grands et plus petits que "a" ainsi que deux loteries P^2 et P^1 où P^2 domine stochastiquement P^1. Le choix se fait entre b_1 et b_2 et par la suite entre b_3 et b_4

b_1: $a + P^2$ vs b_2: $P + P^2$
b_3: $a + P^1$ vs b_4: $P + P^1$

La théorie de l'espérance d'utilité prédit le choix de b_3 et b_1 ou b_2 et b_4. Mais les résultats les plus souvent observés sont b_1 et b_4. Une explication est que mieux l'individu est, lorsqu'il gagne P^2, le plus riscophobe il sera si il perd, alors il aura tendance à se protéger et choisir "a" avec P^2 tandis que P est acceptable avec P^1. Kahneman et Tversky (1979) testèrent un paradoxe appelé *common ratio* où le ratio des probabilités est constant. On est en présence de deux loteries où P>q, y>x>0 et $r \in (0, 1)$. Le choix est le suivant:

1)	P gagne x 1 – P gagne 0	vs	2)	q gagne y 1 – q gagne 0
3)	rP gagne x 1 – rP gagne 0	vs	4)	rq gagne y 1 – rq gagne 0

Encore là, le choix le plus souvent observé est 1 et 4, ce qui est contraire à la théorie de l'espérance d'utilité. On remarque que les trois paradoxes (Allais, *common consequence* et *common ratio*) sont une représentation du phénomène de *fanning out* (Machina 1987). Donc si on explique ce phénomène alors on résout les trois paradoxes. Généraliser ainsi comporte une part de risque car on remarque que le paradoxe d'Allais a comme propriété principale la comparaison d'une loterie avec un montant sûr tandis que *Common consequence* fait appel à des additions de loteries et peut donc comporter une part d'effet richesse. Quant au paradoxe *Common ratio* il fait appel à des probabilités minimes de gain et par conséquent l'explication n'est peut-être pas la même pour les trois.

Donc, les années 60–80 furent des témoins d'une littérature qui applique la théorie de l'espérance d'utilité de façon abondante mais qui ne la teste que très peu souvent, et sa popularité entraînera qu'on la considérera comme un fait acquis.

2.4 Années 80–99

Un paradoxe testé auparavant par les psychologues Lichtenstein et Slovic (1971) mais connu que plus tard en économie, *preference reversal,* est celui qui porta le plus dur coup à la théorie existante bien que les nouvelles théories n'en tiennent pas toujours compte car c'est le plus difficile à intégrer. Il n'en demeure pas moins qu'il a forcé les chercheurs à changer de cap et à se pencher plus profondément sur la base axiomatique de Von Neumann et Morgenstern. Ce paradoxe comporte deux loteries où $P > 0{,}5$, $0{,}5 > q$, $y > x$ et on a le choix suivant :

1)	P gagne x 1 – P gagne 0	2)	q gagne y 1 - q gagne 0

Dans un choix direct, 1) est choisi mais si on demande au décideur de donner un prix à une série de loteries incluant 1) et 2) (il ne faut pas qu'il reconnaisse 1) et 2)) alors il donne un prix plus élevé à 2) qu'à 1). L'explication la plus simple est que dans le choix de loteries c'est la probabilité qui est le facteur de décision tandis que lorsqu'on donne un prix c'est le montant qui est important. Comme nous l'avons vu plus haut, la théorie de l'espérance d'utilité a été crée non dans le but de modéliser précisément la prise de décision de l'agent mais plutôt pour avoir un outil rationnel et facilement utilisable. Dans ce sens ce fut une réussite et ceci est particulièrement dû à l'utilisation du coefficient d'aversion au risque et de la mesure d'accroissement de risque dans des modèles où l'importance des outils n'était pas fondamentale. On ne savait donc pas à quoi s'attendre de la performance de cette théorie lorsqu'elle serait vraiment testée. Malheureusement les résultats sont peu convaincants. À l'exception de l'axiome de comparaison et de continuité qui sont évidents les autres axiomes furent attaqués sérieusement. L'axiome d'indépendance ne pouvait être en accord avec les paradoxes d'Allais, *common ratio, common consequence*... Même l'axiome pourtant simple de transitivité ne résiste pas au paradoxe *preference reversal*. Les autres axiomes qui sont plus raffinés performent évidemment moins bien.

Donc, comme les tests le démontrent, les préférences pour les choix de loteries sont irrationnelles. Par conséquent, une série d'axiomes rationnels basés sur les préférences ne pourra évidemment pas les expliquer. Ici deux voies s'offrent à nous. La première est d'essayer de relâcher certaines hypothèses et donc de modifier la fonction d'évaluation tandis que l'autre, plus drastique, est de considérer que l'axiomatique ne doit pas porter sur les préférences des agents mais plutôt sur sa façon de traiter le problème.

La popularité de la théorie de l'espérance d'utilité acquise au cours des années précédentes a eu l'impact qu'au lieu de repartir à zéro et envisager une théorie nouvelle étant donné le peu de succès de cette dernière à expliquer les tests, on a plutôt utilisé cette théorie comme point de départ pour des modèles d'espérance d'utilité non linéaire. Ces derniers se voulaient une déviation plus ou moins grande à la théorie de référence. Nous présentons en annexe quelques-uns de ces modèles.

Une autre avenue surtout empruntée par des psychologues est l'étude du processus cognitif employé par l'agent pour résoudre le problème des choix de loteries. Lichtenstein et Slovic

(1971) débutèrent ce mouvement qui se poursuivit avec entre autres Birnbaum (1974), Kahneman et Tversky (1979), Meller et al. (1992), Luce et al. (1993), ainsi que Ranyard (1995). Dans la majorité des cas les différentes procédures sont peu ou pas intégrées à un modèle mathématique. Par exemple Kahneman et Tversky (1979) énumèrent plusieurs opérations (cancellation, ségrégation,...) qui se font dans une étape préliminaire et par la suite le décideur incorpore les résultats obtenus dans un modèle mathématique. Bien que la partie procédure ne soit pas intégrée au modèle mathématique on remarque cependant que les différentes opérations effectuées par le décideur sont très bien identifiées. Dans un premier temps il élabore différents *framings* comme par exemple la séparation des montants monétaires en gains et pertes. Une deuxième opération est le groupement des éléments similaires. Par la suite, dans une troisième phase nommée *editing* il effectue des amalgamations où par exemple il additionne les probabilités attachées à des montants monétaires qui ont des valeurs à peu près identiques pour les attribuer à la moyenne de ces montants. Il existe aussi une élimination directe des éléments communs aux deux loteries. Donc comme toutes ces opérations ont été formellement identifiées par des tests, un modèle qui veut tenir compte de la validité psychologique devra contenir toutes ces opérations.

Mentionnons enfin une dernière approche très populaire qui met l'accent sur la fonction d`évaluation des probabilités w(p). Cette dernière a une forme en S (concave puis convexe) et surestime les faibles probabilités tandis que les probabilités élevées sont sous-estimées. Cette fonction fut obtenue à maintes reprises lorsque testée par Wu et Gonzalez (1996, 1999), Camerer et Ho (1994) ainsi que Tversky et Kahneman (1992) et Tversky et Fox (1994). Une axiomatisation qui permet d'obtenir cette fonction est proposée par Prelec (1998). Quoique cette fonction explique assez bien le paradoxe *Common ratio* et la comparaison de loteries avec des montants monétaires sûrs, Alarie et Dionne (1998) ont démontré que, sous certaines conditions peu restrictives, cette fonction ne peut être compatible avec les cas associés aux paradoxes *common ratio* et *preference reversal* pour les simples loteries (0,p;y,1-p). Donc, ici encore, on remarque qu'une déviation à la théorie de l'espérance d'utilité ne semble pas suffisante pour expliquer les tests.

Comme on le remarque, les théories alternatives sont nombreuses. Nous nous proposons par la suite d'étudier quatre théories qui englobent d'une certaine façon celles-ci et qui sont les plus populaires. Ce sont: 1) la théorie de Machina; 2) celle de Bell, Fishburn, Loomes: "la théorie du regret"; 3) la *prospect theory* de Tversky et Kahneman, ainsi que 4) celle de Luce et al. (1992).

2.5 Machina (1982)

Le but principal de Machina était de construire une fonction de préférence qui varie non seulement avec x mais aussi avec la distribution F et il s'est intéressé à des changements de la fonction par rapport à F, ce qui l'a conduit à adopter la notion de différentiabilité la plus naturelle dans ce cas; celle de Fréchet ce qui complique un peu l'aspect mathématique. Le changement de bien-être associé à un changement de distribution (F^* à F) est donné par:

$$v(F^*) = v(F) + \int_0^n U(x:F)[dF^*(x) - dF(x)] + 0(\|F^* - F\|).$$

Avec une série de théorèmes, il établit des relations simples entre la fonction locale U et la fonction globale V. Donc en mettant des restrictions sur la fonction U il obtient différentes décisions pour l'agent qui a la fonction de préférence V. Il est à remarquer que pour le même F l'agent agit selon l'espérance d'utilité (linéaire en p) mais lorsque F varie le résultat est tout autre.

Le paradoxe d'Allais ainsi que la surestimation des faibles probabilités et la sous-estimation des probabilités élevées ont conduit Machina au principe suivant: tout mouvement de la distribution qui rend un point moins important rend la sensibilité à ce point plus grande. Ce qui veut dire qu'un point qui est plus près du centre de la distribution sera sous-évalué par rapport à un point éloigné du centre. Ce principe implique que pour une fonction relativement régulière, le fait de diminuer le point au centre pour le placer dans les queues augmente l'évaluation des queues. Cette hypothèse est souvent rencontrée sous la forme: Si F^* domine stochastiquement F sur $x \in (0 , M)$ alors :

$$-U_{11}(F^*) \div U_1(F^*) > -U_{11}(F) \div U_1(F)$$

pour tout x où les dérivées première et seconde de U sont respectivement U_1 et U_{11}. Donc la variation de F vers F^* augmente l'aversion au risque. Si F^* est un point sûr et F une distribution, on remarque que le paradoxe d'Allais sera facile à résoudre.

La première hypothèse est que pour tout F on a que $-U_{11}(x;F) \div U_1(x;F)$ est non croissante pour tout x. Cette théorie est donc le pas le plus normal pour quelqu'un qui croit à l'essence de l'espérance d'utilité. Elle explique tous les paradoxes concernant le *fanning out* même si ceux-ci ne devraient peut-être pas avoir la même explication. De plus, elle ne résout pas le paradoxe *preference reversal* (par contre voir Safra et al. (1990) à ce sujet). En changeant légèrement la forme de *common consequence*, Starmer (1992) à l'aide d'expérimentations démontre la faiblesse de la théorie ce qui confirme notre appréhension à expliquer tous les *fanning out* de la même manière.

De plus, d'autres tests comme Loomes (1991) ainsi que Kagel et al (1990) démontrent l'incapacité de cette théorie à expliquer leurs résultats.

Le test de Loomes (1989) comprend une loterie à trois points $(p_1,0:p_2,x_2:p_3,x_3)$ où $p_3>p_2$. L'agent doit choisir les quantités x_2 et x_3 sous la contrainte $x_2 + x_3 = k$ où k est constant. Les résultats sont que les montants monétaires sont répartis de telle façon que p_3/p_2 est proportionnel à x_3/x_2, ce qui est contraire à un modèle d'espérance d'utilité où l'on aurait $x_3 = k$ et $x_2 = 0$ pour des agents riscophiles ou moyennement riscophobes comme le fait remarquer Loomes. De plus, en faisant varier p_1 tout en gardant p_3/p_2 constant, on devrait s'attendre au même résultat, mais on obtient plutôt que le ratio x_3/x_2 tend vers 1 et cet effet croît proportionnellement avec p_1, ce qui semble contraire à *common ratio*. De plus dans les modèles où il y a un processus cognitif comme celui de Raynar (1995), on admet souvent l'élimination des variables non pertinentes pour faire le choix. Par exemple, comme le x_1 est fixé à zéro le p_1 serait simplement ignoré, mais ce n'est pas le cas pour ce test. Une explication partielle à ce test serait que si l'on considère que les deux derniers points forment une sous-loterie, alors l'agent devrait considérer plus le point x_2 que x_3, ce qui nous amène au test de Mellers et al. (1992). Dans ce test, on donne un prix à une loterie à deux points et la seule différence entre les loteries est le x_1. Par exemple ils ont testé que (30,.2;83,.8) a eu un prix plus élevé que (0,.2;83,.8). Ce résultat est vraiment contre intuitif et très peu de modèles parviennent à l'expliquer.

2.6 Regret theory

La théorie du regret fut développée par Bell (1982), Fishburn (1982) et Loomes et Sudgen (1987). Cette théorie, comme son nom l'indique, tient compte du regret ou de la joie qu'un individu ressent lorsqu'il reçoit un montant x au lieu d'un montant y qu'il aurait reçu s'il avait choisit l'autre alternative. Pour les probabilités $l(l_1,...l_n)$ et $p(p_1,...p_n)$ et un ensemble de montants $(x_1,...x_n)$, on a:

$$\sum_i \sum_j r(x_i x_j) l_i p_j \qquad \text{ou} \qquad r(x,y) = -r(y,x)$$

Cette théorie réussit à démontrer les paradoxes qui comprennent des *fanning out* ainsi que *preference reversal*.

Cependant, une autre expérience menée par Kahneman et Tversky (1979) complique la discussion. Si on laisse le choix entre :

+) 0,5)))) 1 000
1) 1 000 + 500 ou 1 000 + *
.) 0,5)))) 0

+) 0,5)))) 1 000
2) 2 000 – 500 ou 2 000 – *
.) 0,5)))) 0

et si l'on réduit ces deux choix, on obtient:

+) 0,5))) 2 000
1 500 vs *
.) 0,5))) 1 000

pour les deux loteries. Pour ce paradoxe, on obtient des choix différents pour 1) et 2) même si les loteries résultantes sont semblables. Cet effet connu sous le nom de *framing effet* a été testé de différentes façons et donne toujours le même résultat. La théorie du regret n'a pas le potentiel pour l'expliquer. Tout comme la théorie de Machina cette dernière ne résiste pas au test de Loomes (1991) qui est lui-même un des premiers intervenants dans le développement de ce modèle.

L'originalité de cette théorie est qu'auparavant l'évaluation de x dépendait de p (Machina 1982). Maintenant l'évaluation de x dépend de l'autre alternative y.

Auparavant, la surestimation des loteries avec de faibles probabilités de gain et la sous-estimation des loteries avec des probabilités de gain élevées étaient plus ou moins admises. Mais les tests de Tversky et Kahneman (1992) et Luce et al.(1992) établirent ces deux faits de façon très précise. Le point P où la loterie n'est plus ni surévaluée et ni sous-évaluée est tel que 0,5 > P ce qui implique que les modèles où l'on imposait la symétrie ne sont plus valides. De plus on a que plus la probabilité est proche de zéro ou de un plus la distorsion est grande.

2.7 Cumulative prospect theory

Kahneman et Tversky (1992) proposent une extension de leur modèle nommé *Prospect theory* où les deux élements principaux sont premièrement le fait d'avoir une fonction concave pour les gains et une fonction convexe pour les pertes où la pente de la fonction pour les pertes est plus grande que la pente de la fonction des gains. Deuxièmement, les probabilités sont transformées de telle sorte que les faibles probabilités soient surestimées et les probabilités élevées soient sous-estimées.

L'ajout d'une fonction cumulative qui transforme toute la distribution au lieu de transformer chaque probabilité individuellement a été proposée initialement par Quiggin (1982). Cet ajout améliore la *prospect theory* en permettant le jugement à plusieurs points ou encore à des fonctions de distribution continues au lieu de loteries à deux points seulement. Elle peut aussi s'appliquer aux cas d'incertitude. Finalement la fonction qui transforme les probabilités associées à des montants positifs n'est plus contrainte à être égale à celle qui transforme les probabilités associées aux montants négatifs. On évalue les loteries dans ce modèle de la façon suivante :

$$V(L) = \Sigma_i \, \pi^+_i \, v^+(x_i) + \Sigma_i \, \pi^-_i \, v^-(x_i)$$

où π^+_i représente les probabilités de la loterie L qui sont associées aux montants positifs et π^-_i représentent celles associées aux montants négatifs. La fonction cumulative a la forme suivante :

$$\pi^+_i = w^+(p_i+...+p_n) - w^+(p_{i+1}+...+p_n).$$

Leur modèle est testé à l'aide d'un *pricing* où la fonction v(x) est définie par $v^+(x) = x^\alpha$ et $v^-(x) = -k(-x)^\beta$. Le k est supérieur à 1 ce qui tient compte d'une pondération plus forte pour les montants négatifs que pour les montants positifs. Les fonctions de transformation des probabilités ont la forme suivante :

$$w^s(p) = p^\delta / (p^\delta+(1-p)^\delta)^{1/\delta} \quad s=-,+.$$

Ces deux fonctions ont une forme sinusoïdale ce qui entraîne une surestimation des faibles probabilités et une sous-estimation des probabilités élevées. De plus ces fonctions permettent au point w(p)=p de se réaliser avec un $p \neq 0,5$.

Cette théorie ne permet pas d'expliquer tous les paradoxes dont le très important *preference reversal* ainsi que le *pricing* d'une loterie qui a deux montants strictement positifs. Cependant elle permet d'expliquer très bien certains *framing effects* et le fait que l'aversion au risque est plus grande pour les pertes que pour les gains.

Du point de vue théorique, Kahneman et Tversky introduisent les fonctions de transformation des probabilités sans en justifier leur forme. Ils ne donnent pas de raisons pour lesquelles les faibles probabilités sont surestimées et les probabilités élevées sont sousestimées. Ce modèle demeure cependant l'un des plus performant mais nous croyons qu'il sera très difficile d'y apporter les modifications nécessaires qui permettraient de récupérer les paradoxes non expliqués par cette théorie comme par exemple le paradoxe *preference reversal* car il exige que la fonction d'évaluation d'une loterie dépende de l'autre.

2.8 Luce (1993)

Le paradoxe *preference reversal* ainsi que quelques cas d'intransitivité et le fait que le contexte affecte les choix ont été les motivations qui ont conduit Luce et al. (1993) à considérer un niveau de référence déduit de l'équivalent certain comme base de leur théorie. En prenant ce virage, Luce se détache vraiment de la théorie de l'espérance d'utilité, parce que le point important est la procédure utilisée par l'agent qui dicte son choix.

La procédure employée est la suivante. Dans une première étape, l'agent calcule l'équivalent certain de chaque loterie et à partir de ces différents équivalents certains, il forme un niveau de référence dans la seconde étape. La troisième étape est le positionnement des loteries en terme de gains ou pertes à partir du niveau de référence. Enfin ils recalculent une autre fois un équivalent certain qui diffère évidemment du premier mais les fonctions utilisées sont les mêmes. Les fonctions utilisées pour calculer l'équivalent certain sont des fonctions w^+ et w^- qui transforment les probabilités et qui font partie d'une fonction cumulative π_i. De plus comme le font Kahneman et Tversky (1992), Luce et al. permettent $w^+ \neq w^-$. Les fonctions $v^+(x)=x^\alpha$ et $v^-(x)=-k(-x)^\beta$ sont identiques à celles de la *cumulative prospect theory* tandis que $w(p)=p^\delta$ est plus simple. On a donc ici que la surestimation des loteries avec des faibles probabilités et la sous-estimation des loteries avec des probabilités élevées ne sont pas introduites directement mais sont plutôt causées par la valeur des différents paramètres ainsi que la procédure employée.

Une première critique de cette théorie est qu'elle ne semble pas pouvoir s'associer au problème où x_1 est différent de 0. De plus étant donné que le *pricing* peut être vu comme un cas limite du *preference reversal* classique avec un p = .999, on ne pense pas qu'il pourrait être résoluble si les paramètres sont fixes.

Même si l'idée de base, qui est la formation d'un point de référence à partir duquel on rejuge les loteries, est intéressante, la plus grande faiblesse de ce modèle est la variation exogène de la valeur des différents paramètres lorsque l'on passe d'un paradoxe à un autre. Par exemple si on donne un prix à une loterie on utilise $\alpha_1,\beta_1,\delta_1$, puis si l'on compare deux loteries on utilise $\alpha_2,\beta_2,\delta_2$. Ces variations sont exogènes et évidemment en pondérant à notre guise on peut générer tous les résultats. Tous les paradoxes expliqués à l'aide de la procédure sont bien résolus. Cependant, à cause de la complexité des calculs, il est difficile de déterminer l'importance relative de la procédure par rapport aux valeurs des paramètres.

2.9 Ambiguïté

Le paradoxe d'Ellsberg (1961) fut le premier à exposer le problème de l'ambiguïté. Ce paradoxe viole la théorie de l'espérance d'utilité ainsi que la théorie subjective d'espérance d'utilité.

Le résultat principal est que le décideur préfère une situation non ambiguë à une situation ambiguë. Il existe plusieurs définitions de l'ambiguïté mais la plupart ont pour base le concept d'information manquante. Cette façon de définir le problème tend à établir une frontière entre l'ambiguïté et les autres paradoxes et ceci attaque directement une approche basée sur la procédure puisque cette dernière ne doit pas fonctionner seulement pour les loteries mais elle doit être assez générale pour expliquer aussi les choix de l'agent pour des biens physiques et à plus forte raison pour l'ambiguïté.

Camerer et Weber (1992) font une excellente revue de la littérature de l'ambiguïté. Ils exposent clairement les différentes théories et classent les faits stylisés. Avec l'aide de certains faits stylisés nous allons démontrer qu'il n'existe pas de frontières entre l'ambiguïté et les autres paradoxes.

Le premier fait est que l'ambiguïté est préférée lorsque les probabilités de gains sont faibles et inversement lorsque les probabilités de gains sont élevées. Le deuxième fait est que la plus forte aversion à l'ambiguïté se produit pour des valeurs intermédiaires de p c'est-à-dire autour de p = 0,5. Le troisième fait est que l'aversion à l'ambiguïté est plus forte lorsqu'on passe d'une situation sans ambiguïté à une situation avec ambiguïté que lorsque l'on a deux situations qui contiennent toutes les deux de l'ambiguïté.

Le paradoxe *Common ratio* nous dit qu'un agent aura tendance à prendre plus de risques lorsque les probabilités sont faibles que lorsqu'elles sont élevées et c'est ce phénomène que l'on observe pour le premier fait. La première partie du paradoxe *preference reversal* démontre que la perception d'une probabilité supérieure à p = 0,5 lorsque comparée à une probabilité inférieure à p = 0,5 est surévaluée ce qui entraîne une très grande aversion à l'ambiguïté et explique le deuxième fait. Le troisième fait nous démontre une discontinuité entre l'existence et la non-existence de l'ambiguïté, et ce genre de discontinuité apparaît constamment dans les autres paradoxes comme le *Pricing*, le paradoxe où le x_1 est différent de 0... Donc nous avons vu que les problèmes de l'ambiguïté semblent étroitement reliés aux autres paradoxes.

3. Procédure

3.1 Littérature

La différence fondamentale entre la procédure et les modèles basés sur l'espérance d'utilité est que pour la première l'axiomatique est basée sur les façons de résoudre le problème de choix de loteries plutôt que de porter directement sur les choix comme dans la seconde.

Lorsque l'on ajoute une fonction de perception des probabilités à la fonction d'utilité, les modèles restent très près de l'original. Cependant lorsque l'évaluation des loteries dépend de l'autre alors la transitivité et donc les axiomes basés sur le choix semblent incompatibles avec ces modèles. Par conséquent le paradoxe classique *preference reversal* (Lichtenstein et Slovic 1971) et celui où $x_1 \neq 0$ (Birnbaum et Sutton 1992) portent un dur coup a une axiomatique basée sur les choix observés.

Ajoutons à ceci qu'il existe encore de nombreux cas non testés pour les loteries à deux points comme le paradoxe *common ratio* avec des loteries où $x_1 \neq 0$. Un autre exemple non testé avec ce même paradoxe est le cas où $x_1 < 0 < x_2$. Mais l'endroit où nos connaissances sont le plus limitées est celui des loteries à trois points ou plus. Par conséquent la réalisation de ces tests ne pourra qu'augmenter la problématique et donc exigera une compréhension plus profonde de la façon de décider de l'agent.

Une des premières théories qui permet des choix intransitifs est la théorie du regret (Bell 1982). L'idée de base de ce modèle est que l'évaluation d'une loterie dépend de l'autre loterie et par conséquent du contexte.

Luce et al. (1993) ont proposé un modèle où le choix est vu comme un principe secondaire tandis que l'équivalent certain est la base de la résolution des paradoxes. Ce modèle tout comme le précédent considère que le contexte joue un rôle fondamental. Leland (1994) a construit un modèle où les irrationalités observées sont entièrement dues à la procédure utilisée par l'agent. La perception des probabilités et des montants monétaires est différente des deux autres modèles mais le contexte demeure un point important pour cette théorie.

Signalons enfin les nombreux tests effectués dans le but de déterminer de façon précise les opérations utilisées par l'agent (cancellation, agrégation...). Quoique ces opérations ne fassent pas encore parti d'un modèle, elles sont cependant identifiées comme étant la cause première de différents paradoxes.

3.2 Exemple

À ce point, on peut se demander quelle est la rationalité qui pousse le décideur à considérer le contexte et à utiliser toutes ces opérations lors des choix de loteries. Une réponse pourrait être qu'il maximise sa façon de juger en considérant les qualités les plus raffinées possible.

Une façon d'appliquer ce principe aux loteries est la suivante. Une différence qualitative bien connue dans la littérature (Kahneman et Tversky 1979, Prelec 1995, Wu et Gonzalez 1998) est la différence entre les qualités “sûreté” S quand $p \in \{0,1\}$ et “risque” R quand $p \in]0,1[$. Cette séparation raffine le domaine des probabilités. Un autre raffinement est possible pour les probabilités ayant la qualité R. Ce dernier a été identifié par MacCrimon et Larsson (1979) en demandant directement aux sujets si cette façon de séparer les probabilités était compatible avec leur processus de résolution. Pour ce raffinement on a simplement que les probabilités $p \in]0,p^*[$ ont la qualité F pour faible et les $p \in [p^*,1[$ ont la qualité E pour élevée.

Donc, l'ajout d'axiomes usuels (une probabilité peut être jugée en considérant une certaine qualité si elle appartient au domaine de cette qualité...), combiné à une maximisation proportionnelle au raffinement, entraîne que la comparaison d'une loterie avec un montant monétaire sûr se fait avec les qualités {S,R} tandis que le choix entre une loterie avec une probabilité de gain élevée et une autre ayant une faible probabilité de gain se fait avec les qualités {E,F}. Cette différence explique le paradoxe *preference reversal*. De la même façon on aurait que pour le paradoxe *common ratio* les qualités considérées sont {E,E} dans un premier temps, puis {F,F} lorsque l'on modifie les probabilités.

Donc, ce principe de maximisation est très général et peut s'appliquer à tous les biens. Ici, seules les qualités sont spécifiques aux probabilités. De plus, il est à remarquer que cette approche qui représente fidèlement le comportement du décideur peut être modélisée à l'aide d'une fonction de transformation des probabilités $w(p_1;p_2)$ et est donc facilement utilisable.

4. Conclusion

Nous avons vu comment l'évolution des modèles dictée par des considérations pratiques ainsi que par les tests nous a conduit à la situation actuelle dans la littérature. Nous avons par la suite présenté quelques modèles basés sur la procédure.

Une des qualités que devrait posséder les modèles est un changement de procédure associé à un changement de contexte. Il existe plusieurs façons d'atteindre ce but, mais à notre avis un tel changement provoqué de façon endogène par une maximisation de la perception de l'agent serait la meilleure approche.

Annexe

Subjective expected utility\prospect theory par Ward Edwards (1955, 1962) et Kahneman et Tversy (1979)

$$\sum_{i=1}^{n} v(x_i)f(p_i)$$

Subjectively weighted utility par Uday Karmarkar (1978, 1979)

$$[\sum_{i=1}^{n} v(x_i)f(p_i)]\div[\sum_{i=1}^{n} f(p_i)]$$

Weighted utility par Chew et MacCrimmon (1979), Chew (1983) et Fishburn (1983)

$$[\sum_{i=1}^{n} v(x_i)l(x_i)p_i]\div[\sum_{i=1}^{n} l(x_i)p_i]$$

Anticipated utility par John Quiggin (1982)

$$\sum_{i=1}^{n} v(x_i)[g(\sum_{j=1}^{i} p_j)-g(\sum_{j=1}^{i-1} p_j)]$$

General quadratique par Chew, Epstein, et Segal (1988)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} T(x_i,x_j)P_iP_j$$

Optimism\pessimism par John Hey (1984)

$$\sum_{i=1}^{n} v(x_i)g(p_i;x_1,...,x_n)$$

Ordinal independence par Segal (1984), Green et Jullien (1988)

$$\sum_{i=1}^{n} h(x_i,\sum_{j=1}^{i} p_j)[g(\sum_{j=1}^{i} p_j)-g(\sum_{j=1}^{i-1} p_j)]$$

Plusieurs de ces modèles ainsi que d'autres comme ceux de Yaari (1987), Viscusi (1989) et Gul (1991) sont testés par Hey (1994).

Bibliographie

ALARIE, Y. (1997), «Trois études sur la prise de décision en incertitude en économie», thèse de doctorat, Université de Montréal.

ALARIE, Y. et DIONNE, G. (1998), «Some Remarks about the Probability Weighting Function», Working paper, Risk Management Chair et C.R.T.

ALLAIS, M. (1953), «Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critiques des postulats et axiomes de l'école américaine», *Econometrica*, 21, 503–546.

ALLAIS, M. et HAGEN, O. (1979), «Expected Utility Hypothese and the Allais Paradox» (Dordrect; J.Reidel Pub.).

ARROW, K.J. (1951), «Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-taking Situations», *Econometrica*, 19, 404–437.

BELL, D. (1982), «Regret in Decision Making under Uncertainty», *Operations Research*, 20, 961–981.

BIRNBAUM, M.H. et SUTTON, S.E. (1992), «Scale Convergence and Decision Making», *Organizational Behaviour and Human Decision Process*, à paraître.

CAMERER, C.F., (1992), «Recent Tests of Generalizations of Expected Utility Theory»in W.Edwards ed., Utility: Theories, Measurement and Applications, Boston, MA: Kluwer academic publisher.

CAMERER, C.F. et Ho, T.-H., (1994), «Violation of the Betweeness Axiom and Nonlinearity in Probability», *Journal of Risk and Uncertainty*, 8, 167–196.

CAMERER, C.F., WEBER, M. (1992), «Recent Developpements in Modeling Preferences: Uncertainty and Ambiguity», *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 325–370.

CHEW, S.H. (1983), «A Generalization of the Quasilinear Mean with Applications to the Measurement of Inequality and Decision; Theory Resolving the Allais Paradox», *Econometrica*, 51, 1065–1092.

CHEW, S.H., EPSTEIN, L. et SEGAL, U. (1988), «Mixture Symetric Utility Theory», Manuscript, dept. of Economics, U. of Toronto.

DIONNE, G., (1988), «Incertain et Information», Economica, France.

EARL, P.E. (1990), «Economics and Psychology: a Survey»,*The Economic Journal,* 100, 718–755.

EECKHOUDT, L. et GOLLIER, C., (1992), «Les risques financiers : évaluation, gestion, partage», Ediscience, France.

EDWARDS, W. (1992), Utiliy Theories: Measurements and Applications' Kluwer Academic Publisher, Boston, MA.

EDWARDS, W. (1955), «The Prediction of Decision among Bets» *Journal of Experimental Psychology*, 50,201–214.

ELLSBERG, D. (1961), «Risk, Ambiguity, and the Savage Axiom» *Quartely Journal of Economics* 75, 643–669.

FISCHBURN, P. (1982), «Non Transitive Measurable Utility», *Journal of Economic Theory*, 31,293–317.

GREEN, J. et JULLIEN, B. (1988), «Ordinal Independence in Non Linear Utility Theory», *Journal of Risk and Uncertainty*, 1, 355–387.

GUL, F. (1991), «A Theory of Disappointment Aversion» *Econometrica*, 59, 667–686.

HANOCH, G. et LEVY, H. (1969), «The Efficiency Analysis of Choices Involving risk», *Review of Economic Studies*, 36, 335–346.

HAGEN, O., (1979), «Towards a Positive Theory of Preference under Risk» in Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox, D.Reidel Publishing Company.

HEY, J., et ORME, C. (1994), «Investigating Generalisations of Expected Utility Theory Using Experimental Data», *Econometrica*, 62, 1291–1326.

IRWIN, J., SLOVIC, P., LICHTENSTEIN, S., McCLELLAND, G.H. (1993), «Preference Reversals and the Measurement of Environnemental Values», *Journal of Risk and Uncertainty*, 6, 5–18.

KAGEL, J.H., MACDONALD, D.N. et BATTALIO, R.C. (1990), «Tests of Fanning out of Indifference Curves: Results from Animal and Human Experiments», *American Economic Review*, 80, 912–921.

KAHNEMAN, D. et TVERSKY, A. (1979), «Prospect Theory:an Analysis of Decision under Risk»,*Econometrica*, 47, 263–291.

KARMAKAR, U. (1978), «Subjectively Weighted Utility: a Descriptive Extension of the Expected Utility Model», *Organizational Behaviour and Human Performance*, 21, 61–92.

LELAND, J.W. (1994), «Generalized Similarity Judgments: An Alternative Explanation for Choice Anomalies», *Journal of Risk and Uncertainty*, 9, 2, 151–172.

LICHTENSEIN, S. et SLOVIC, P. (1971), «Reversals of Preference between Bids and Choices in Gambling Decision», *Journal of Experimental Psychology*, 89, 46–52.

LICHTENSEIN,S. et SLOVIC,P. (1973), «Response-Induced Reversals of Preference in Gambling: An Extended Replication in Las Vegas», *Journal of Experimental Psychology,* 101, 16–20.

LOOMES, G. et SUDGEN, R. (1982), «Regret theory: an Alternative theory of Rational Choice under Uncertainty», *Economic journal*, 92, 805–824.

LOOMES, G. et SUDGEN, R. (1987), «Some Implications of a more General Form of Regret Theory», *Journal of Economic Theory*, 41, 270–288.

LOOMES, G. (1991), «Evidence of a New Violation of the Independance Axiom», *Journal of Risk and Uncertainty*, 4, 92–109.

LUCE,R.D., MELLERS, B.A., CHANG, S. (1993), «Is Choice the Correct Primitive? on Using Certainty Equivalents and Reference Levels to Predict Choices among Gambles», *Journal of Risk and Uncertainty*, 6, 115–141.

MacCRIMON, K.R., LARSSON, S. (1979), «Utility Theory: Axioms versus Paradoxe» in Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox, D. Reidel publishing company.

MACHINA, M.J., (1982), «Expected Utility Analysis without the Independance Axiom», *Econometrica*, 50, 277–323.

MACHINA, M.J. (1987), «Choice under Uncertainty:problems Solved and Unsolved», *Journal of Economic Perspectives*, 1, 121–154.

MACORD, M. et de NEUFVILLE, R. (1984), «Utility Dependance on Probability: an Empirical Demonstration», *Large Scale Systems*, 6, 91–103.
MELLERS, B., WEISS, R. et BIRNBAUM, M. (1992), «Violation of Dominance in Pricing Judgments», *Journal of Risk and Uncertainty*, 3, 323–343.

PRATT, J.W. (1964), «Risk Aversion in the Small and in the Large», *Econometrica*, 32, 122–136.

PRELEC, D. (1998), «The Probability Weighting Function», *Econometrica*, 66, 497–527.

QUIGGIN, J. (1982), «A theory of Anticipated Utility», *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 3, 92–109.

RANYARD, R. (1995), «Reversals of Preference between Compound and Simple Risk: the Role of Editing Heuristics», *Journal of Risk and Uncertainty*, 11, 159–175.

RUBINSTEIN, A. (1988), «Similarity and Decision-Making under Risk (Is there a Utility Theory Resolution to the Allais Paradox?)», *Journal of Economic Theory*, 46, 145–153.

SEGAL, U. (1984), «Nonlinear Decision Weights With the Independance Axiom», Manuscript, dept. of Economics, UCLA.

STARMER, C., SUDGEN, R. (1993), «Testing for Juxtaposition and Event-Splitting Effects», *Journal of Risk and Uncertainty*, 6, 235–254.

TVERSKY, A., SLOVIC, P. et KAHNEMAN, D. (1990), «The Causes of Preference Reversals», *American Economic Review*, 80, 204–217.

TVERSKY, A. et WEATH, C. (1991), «Preference and Belief:Ambiguity and Competence in Choice under Uncertainty», *Journal of Risk and Uncertainty*, 4, 5–28.

TVERSKY, A. et KAHNEMAN, D. (1992), «Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty», *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297–323.

TVERSKY, A. et FOX, C.R. (1994), «Weighting Risk and Uncertainty», *Psychological Review*, 102, 269–283.

Von NEUMANN, J et MORGENSTERN, O., «Theory of Games and Economic Behaviour», Princeton University Press, 1947.

VISCUSI, W. KIP., (1989), «Prospective Reference Theory:Toward an Explanation of the Paradoxes», *Journal of Risk and Uncertainty*, 2, 235–263.

WAKKER, P. et TVERSKY, A. (1995), «Risk Attitudes and Decision Weights» *Econometrica*, 05, 1255–1280.

WAKKER, P., THALER, R.H. et TVERSKY, A., (1997), «Probabilistic Insurance» *Journal of Risk and Uncertainty*, 15, 7–28.

WU, G. et GONZALEZ, R. (1996), «Curvature of the Probability Weighting Function» *Management Science*, 42, 1676–1690.

WU, G. et GONZALEZ, R. (1999), «Nonlinear Decision Weights in Choice under Uncertainty», *Management Science*, à paraître.