Cahier de recherche 03-06
Septembre 2003

MODÈLE BAYÉSIEN DE TARIFICATION DE L'ASSURANCE DES FLOTTES DE VÉHICULES

Jean-François Angers, Université de Montréal
Denise Desjardins, Université de Montréal
Georges Dionne, HEC Montréal

Résumé

Nous proposons un modèle paramétrique de tarification de l'assurance de véhicules routiers appartenant à une flotte. Les tables de primes qui y sont présentées tiennent compte des accidents passés des véhicules, des caractéristiques observables des véhicules et des flottes et des infractions au code de la sécurité routière des conducteurs et des transporteurs. De plus, les primes sont ajustées en fonction des accidents accumulés par les flottes dans le temps. Il s'agit d'un modèle qui prend en compte directement des changements explicites des différentes composantes des probabilités d'accidents. Il représente une extension aux modèles d'assurance automobile de type bonus-malus pour les primes individuelles (Lemaire, 1985; Dionne et Vannase, 1989 et 1992; Pinquet, 1997 et 1998; Frangos et Vrontos, 2001; Purcaru et Denuit, 2003). L'extension ajoute un effet flotte à l'effet véhicule pour tenir compte des caractéristiques ou des actions non observables des transporteurs sur les taux d'accidents des camions. Cette forme de tarification comporte plusieurs avantages. Elle permet de visualiser l'impact des comportements des propriétaires des flottes et des conducteurs des véhicules sur les taux d'accidents prédits et, par conséquent, sur les primes. Elle mesure l'influence des infractions et des accidents accumulés sur les primes d'assurance mais d'une façon différente. En effet, les effets des infractions sont obtenus via la composante de régression, alors que les effets des accidents proviennent des résidus non expliqués de la régression sur les accidents des camions via un modèle bayésien de tarification.

Mots clés : Tarification de l'assurance, flotte de véhicules, modèle bayésien, sécurité routière, bonus-malus.

Classification JEL : D81.

Abstract

We are proposing a parametric model to price insurance for road vehicles belonging to a fleet. The tables of premiums presented in the article take into account past vehicle accidents, observable characteristics of the vehicles and fleets, and violations of the road safety code committed by drivers and transporters. The premiums are also adjusted according to accidents accumulated by the fleets over time. The model proposed accounts directly for explicit changes in the various components of the probability of accidents. It represents an extension of insurance models for individual premiums (Lemaire, 1985; Dionne and Vannase, 1989 and 1992; Pinquet, 1997 and 1998; Frangos and Vrontos, 2001; Purcaru and Denuit, 2003). The extension adds a "fleet" effect to the "vehicle" effect so as to measure the impact that the non-observable characteristics or actions of transporters have on truck accident rates. This form of pricing offers several advantages. It allows us to visualize what impact the behaviours of owners and drivers can have on the predicted rate of accidents and, consequently, on premiums. It measures the influence of traffic violations and accumulated accidents on insurance premiums from a different angle. Indeed, the effects of violations are obtained by means of the regression component, whereas the effects of accidents are derived from unexplained residuals of the regression on truck accidents via a Bayes pricing model.

Keywords: Insurance pricing, fleet of vehicles, Bayes model, road safety, Bonus-Malus.

JEL classification: D81.

1. INTRODUCTION

Très peu d'études ont analysé de façon systématique les risques d'accident des flottes de véhicules. Marie-Jeanne (1994) a développé un modèle de tarification de l'assurance en fonction de la taille de la flotte et Teugels et Sundt (1991) ont proposé une tarification basée sur la perte agrégée de la flotte. D'autres chercheurs se sont confinés à étudier les conducteurs des véhicules pour avoir un portrait des risques que représente un transporteur (Dionne et al., 1995, 2001b). C'est oublier que le propriétaire ou la direction des entreprises peuvent affecter les taux d'accidents de leurs véhicules. Les décisions sur les heures de travail, les dépenses d'entretien des véhicules et les directives sur les charges ou les arrimages des véhicules peuvent affecter la sécurité routière. Dionne, Desjardins et Pinquet (1999a et 2001a) ont développé des modèles bonus-malus qui tiennent compte des comportements des conducteurs et des propriétaires des véhicules en utilisant une approche semi paramétrique. Dans cet article, nous proposons une approche paramétrique.

La mesure des risques des flottes de véhicules est difficile pour plusieurs raisons. D'une part, il faut définir les unités qui composent les flottes. Devons-nous prendre les conducteurs ou les véhicules? En réponse à cette question, nous avons opté d'utiliser les véhicules, car les informations disponibles chez les assureurs permettent de relier continuellement les véhicules aux transporteurs, alors qu'il est très coûteux de relier les informations des conducteurs aux transporteurs, puisque les déplacements des conducteurs d'une flotte à une autre ne sont pas comptabilisés systématiquement, alors que les déplacements des véhicules le sont (immatriculation et assurance). Les véhicules représentent des risques individuels différents. Ces risques sont influencés par des caractéristiques observables et non observables des véhicules, des conducteurs qui les utilisent et des transporteurs qui les possèdent ou les louent à long terme. Il est donc important de bien modéliser ces différentes sources d'information.

Une autre difficulté réside dans les poids que l'on doit accorder aux informations statistiques individuelles et communes (des flottes) obtenues à des fins de tarification. Une modélisation adéquate de la tarification des risques des flottes doit intégrer les comportements des conducteurs à ceux des propriétaires afin d'introduire des incitatifs à la prudence qui tiennent compte des différents niveaux de décision en présence de risque moral hiérarchique (Winter, 2000).

Nous proposons un nouveau modèle de tarification des véhicules appartenant à une flotte (Fluet, 1999). Il s'agit d'un modèle paramétrique qui peut tenir compte directement des comportements et des caractéristiques observables et non observables des véhicules, des conducteurs et des propriétaires des flottes de véhicules. Le modèle proposé est une extension directe des modèles d'assurance automobile de type bonus-malus (Lemaire 1985; Dionne et Vannase 1989 et 1992; Pinquet 1997, 1998; Frangos et Vrontos 2001; Purcaru et Denuit 2003) pour des primes individuelles (voir Pinquet 2000 pour une revue de la littérature). L'extension ajoute un effet aléatoire flotte à celui des véhicules dans le modèle pour tenir compte à la fois des effets non observables des transporteurs, des véhicules et de leurs conducteurs sur les taux d'accidents des camions dans le calcul bayésien ou a posteriori des primes. Des variables observables caractérisant les véhicules, les flottes et le comportement de sécurité routière des conducteurs et des propriétaires des flottes sont utilisées dans l'évaluation *a priori* des risques des différents véhicules.

Nous présentons dans la section suivante les modèles statistiques d'estimation des probabilités d'accidents des véhicules appartenant à des flottes de différentes tailles. Des estimations statistiques de ces modèles sont également discutées. La section 3 développe le système bonus-malus optimal intégrant, à la fois, les effets flottes et les effets véhicules. La section 4 propose différentes tables de primes alors que la section 5 offre une discussion sur des extensions possibles du modèle.

2. MODÈLES STATISTIQUES ET ESTIMATIONS ÉCONOMÉTRIQUES

Notre méthodologie est divisée en deux étapes. Dans un premier temps, nous devons évaluer les probabilités d'accidents des véhicules des transporteurs à l'aide d'un modèle économétrique. Nous utiliserons les paramètres estimés, comme information *a priori*, dans le calcul des primes d'assurance. Ces paramètres tiennent compte de l'information disponible sur les caractéristiques observables des véhicules et des flottes de même que des infractions des conducteurs et des transporteurs. Afin de tenir compte des caractéristiques et des actions non observables dans la tarification, nous utiliserons les résidus des estimations économétriques. Une contribution de l'article est de proposer un nouveau modèle d'estimation des probabilités d'accidents qui permette d'isoler explicitement l'effet flotte de l'effet véhicule. Dans un deuxième temps, nous proposons un système bonus-malus qui utilisera, à la fois, l'information *a priori* obtenue des paramètres estimés et l'information *a posteriori* obtenue des résidus des estimations des distributions d'accidents des véhicules. Afin de bien démontrer la contribution des différents effets sur les primes d'assurance, nous distinguerons le transporteur ayant un seul véhicule de celui qui en a deux, puis nous généraliserons le modèle au transporteur ayant plus de deux véhicules.

2.1. MODÈLE ÉCONOMÉTRIQUE D'ESTIMATION DES DISTRIBUTIONS D'ACCIDENTS DES VÉHICULES

La plupart des modèles économétriques appliqués à des variables discrètes (ou de comptage) ont pour point de départ la distribution de Poisson, où la probabilité *P* d'être impliqué dans y_{fi}^{j} accidents à la période *j* pour un véhicule *i* appartenant à la flotte *f* peut être représentée par l'expression suivante (Hausman et al., 1984; Gouriéroux, 1999) :

$$P\left(y_{fi}^{j} \mid \lambda_{fi}^{j}\right) = \frac{e^{-\lambda_{fi}^{j}} \left(\lambda_{fi}^{j}\right)^{y_{fi}^{j}}}{y_{fi}^{j}!} .$$

Par définition de la loi de Poisson, nous avons que l'espérance mathématique du nombre d'accidents (E) est égale à la variance (Var), $E\left(Y_{fi}^{j}\right) = Var\left(Y_{fi}^{j}\right) = \lambda_{fi}^{j}$ où Y_{fi}^{j} est le nombre d'accidents du camion *i* de la flotte *f* à la période *j* et $\lambda_{fi}^{j}\left(>0\right)$ est le paramètre de la loi de Poisson. Cette modélisation suppose implicitement que la distribution d'accidents peut être expliquée entièrement par l'hétérogénéité observable, ce qui rend inutile l'utilisation d'un système bonus-malus.

Supposons maintenant qu'il existe de l'hétérogénéité non observable parce que certaines caractéristiques ou actions ne sont pas observables par l'assureur. Posons $\lambda_{fi}^{j} = \gamma_{fi}^{j}\alpha_f\theta_{fi}$ avec $\gamma_{fi}^{j} = d_{fi}^{j}e^{X_{fi}^{j}\beta}$, où d_{fi}^{j} mesure le nombre de jours que le véhicule *i* de la flotte *f* est autorisé à circuler durant la période *j*, divisé par le nombre de jours total de la période *j*. C'est une mesure d'exposition au risque d'accident. L'emploi de l'exponentiel pour définir γ_{fi}^{j} nous permet d'assurer la non-négativité de λ_{fi}^{j}. Le vecteur $X_{fi}^{j} = \left(x_{fi1}^{j}, \cdots, x_{fip}^{j}\right)$ contient les *p* caractéristiques du camion *i* de la flotte *f* observées à la période *j* ; ce vecteur contient des informations spécifiques au véhicule et d'autres spécifiques à la flotte. Le paramètre α_f est l'effet aléatoire associé à la flotte *f*, c'est-à-dire le risque non observable attribuable à la flotte, tandis que le paramètre θ_{fi} est l'effet aléatoire du camion *i* de la flotte *f*. Nous supposons que $\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi} = 1$ où I_f est le nombre total de véhicules dans la flotte *f*. En d'autres termes, θ_{fi} est la proportion du risque de la flotte *f* attribuable au véhicule *i* ; ainsi, le risque total non observable du véhicule *i* de la flotte *f* est défini par $\alpha_f\theta_{fi}$. Il est à noter que lorsque la flotte *f* n'a qu'un seul véhicule, c'est-à-dire $I_f = 1$, $\theta_{f1} = 1$ par définition, ce qui signifie que le risque attribuable au véhicule correspond à celui de la flotte, ce qui entraîne que $\lambda_{f1}^{j} = \gamma_{f1}^{j}\alpha_f$.

Nous faisons l'hypothèse que θ_{fi} suit une distribution Dirichlet de paramètres $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{I_f})$ et que α_f suit une distribution gamma de paramètres $\left(I_f\kappa^{-1}, \kappa^{-1}\right)$.

2.1.1. Transporteur de taille 1

Pour une période *j*, la distribution du nombre d'accidents de la flotte qui n'a qu'un seul véhicule est donnée par :

$$P\left(y_{f1}^{j}\right) = \int_0^{\infty} P\left(y_{f1}^{j} \mid \alpha_f\right) f\left(\alpha_f\right) d\alpha_f,$$

ce qui peut être réécrit de la façon suivante, sous l'hypothèse que α_f suit une distribution gamma de paramètres $\left(I_f\kappa^{-1}, \kappa^{-1}\right)$,

$$P\left(y_{f1}^{j}\right) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\left(\gamma_{f1}^{j}\right)^{y_{f1}^{j}}}{\Gamma\left(y_{f1}^{j}+1\right)} \left(\alpha_f\right)^{y_{f1}^{j}} e^{-\alpha_f\gamma_{f1}^{j}} \right) \left(\frac{\left(\kappa^{-1}\right)^{\kappa^{-1}} \left(\alpha_f\right)^{\kappa^{-1}-1} e^{-\kappa^{-1}\alpha_f}}{\Gamma\left(\kappa^{-1}\right)} \right) d\alpha_f.$$

Maintenant, si nous intégrons cette expression par rapport à α_f, nous obtenons la distribution binomiale négative dont la probabilité d'accidents est donnée par :

$$P\left(y_{f1}^{j}\right)=\frac{\Gamma\left(y_{f1}^{j}+\kappa^{-1}\right)}{\Gamma\left(y_{f1}^{j}+1\right)\Gamma\left(\kappa^{-1}\right)}\left(\frac{\kappa^{-1}}{\kappa^{-1}+\gamma_{f1}^{j}}\right)^{\kappa^{-1}}\left(\frac{\gamma_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\gamma_{f1}^{j}}\right)^{y_{f1}^{j}}. \tag{1}$$

Cette distribution a été utilisée à plusieurs reprises dans la littérature (Lemaire 1985; Dionne et Vanasse 1989; Gouriéroux 1999). Elle permet de modéliser l'hétérogénéité non observable et d'introduire un système bonus-malus pour des observations individuelles. Par contre, elle ne peut pas être appliquée directement pour estimer les probabilités d'accident des véhicules appartenant à une flotte, car elle ne permet pas d'isoler l'effet flotte de l'effet véhicule. Nous présentons maintenant notre généralisation de ce modèle de base en débutant par le cas simple d'une flotte ayant deux véhicules.

2.1.2. Transporteur ayant 2 véhicules

La probabilité jointe du nombre d'accidents à la période *j* des deux véhicules de la flotte *f* est donnée par :

$$P\left(y_{f1}^{j},y_{f2}^{j}\right)=\int_{0}^{1}P\left(y_{f1}^{j},y_{f2}^{j}\mid\theta_{f}\right)f\left(\theta_{f}\right)d\theta_{f},$$

où

$$\theta_{f}=\theta_{f1}\ \text{ et }\ 1-\theta_{f}=\theta_{f2}.$$

Conditionnellement à θ_f, la probabilité jointe d'accident est égale à :

$$P\left(y_{f1}^{j},y_{f2}^{j}\mid\theta_{f}\right)=\left[\frac{\left(\gamma_{f1}^{j}\right)^{y_{f1}^{j}}\left(\gamma_{f2}^{j}\right)^{y_{f2}^{j}}\left(\theta_{f}\right)^{y_{f1}^{j}}\left(1-\theta_{f}\right)^{y_{f2}^{j}}\kappa^{-2\kappa^{-1}}}{\Gamma\left(y_{f1}^{j}+1\right)\Gamma\left(y_{f2}^{j}+1\right)\Gamma\left(2\kappa^{-1}\right)}\right]\int_{0}^{\infty}\left[\left(\alpha_{f}\right)^{\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}+2\kappa^{-1}-1}\right]\left[e^{-\alpha_{f}\left(\theta_{f}\gamma_{f1}^{j}+(1-\theta_{f})\gamma_{f2}^{j}+\kappa^{-1}\right)}\right]d\alpha_{f}.$$

Ainsi, en intégrant, nous obtenons une distribution binomiale négative conditionnelle à θ_f :

$$P\left(y_{f1}^{j},y_{f2}^{j}\mid\theta_{f}\right)=\left[\frac{\left(\gamma_{f1}^{j}\right)^{y_{f1}^{j}}\left(\gamma_{f2}^{j}\right)^{y_{f2}^{j}}\left(\theta_{f}\right)^{y_{f1}^{j}}\left(1-\theta_{f}\right)^{y_{f2}^{j}}}{\Gamma\left(y_{f1}^{j}+1\right)\Gamma\left(y_{f2}^{j}+1\right)}\right]\left[\frac{\kappa^{-2\kappa^{-1}}}{\Gamma\left(2\kappa^{-1}\right)}\right]\frac{\Gamma\left(2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}\right)}{\left(\kappa^{-1}+\theta_{f}\gamma_{f1}^{j}+\left(1-\theta_{f}\right)\gamma_{f2}^{j}\right)^{2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}}}. \tag{2}$$

Si maintenant nous substituons la valeur de $P\left(y_{f1}^{j},y_{f2}^{j}\mid\theta_{f}\right)$ donnée en (2) dans $P\left(y_{f1}^{j},y_{f2}^{j}\right)$, nous obtenons :

$$P\left(y_{f1}^j, y_{f2}^j\right) = \int_0^1 \left[\frac{\left(\gamma_{f1}^j\right)^{y_{f1}^j}\left(\gamma_{f2}^j\right)^{y_{f2}^j}\left(\theta_f\right)^{y_{f1}^j}\left(1-\theta_f\right)^{y_{f2}^j}}{\Gamma\left(y_{f1}^j+1\right)\Gamma\left(y_{f2}^j+1\right)}\right]\left[\frac{\kappa^{-2\kappa^{-1}}}{\Gamma\left(2\kappa^{-1}\right)}\right]\frac{\Gamma\left(2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j\right)}{\left(\kappa^{-1}+\theta_f\gamma_{f1}^j+\left(1-\theta_f\right)\gamma_{f2}^j\right)^{2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j}} f\left(\theta_f\right) d\theta_f \cdot \quad (3)$$

Afin d'estimer les probabilités d'accident avec une approche paramétrique, nous devons maintenant rendre plus explicite la distribution de θ_f . Comme indiqué plus haut, nous supposons que l'effet véhicule suit une distribution Dirichlet. En remplaçant la fonction de densité $f\left(\theta_f\right)$ dans l'équation (3) par la densité d'une Dirichlet (qui est une bêta multivariée) de paramètres $\left(\nu_1, \nu_2\right)$, soit $f\left(\theta_f\right) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{2}\nu_i\right)}{\prod_{i=1}^{2}\Gamma\left(\nu_i\right)}\left(\theta_f\right)^{\nu_1-1}\left(1-\theta_f\right)^{\nu_2-1}$, nous obtenons :

$$P\left(y_{f1}^j, y_{f2}^j\right) =$$
$$\frac{\left(\gamma_{f1}^j\right)^{y_{f1}^j}\left(\gamma_{f2}^j\right)^{y_{f2}^j}}{\Gamma\left(y_{f1}^j+1\right)\Gamma\left(y_{f2}^j+1\right)}\left[\frac{\Gamma\left(2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j\right)\kappa^{-2\kappa^{-1}}}{\Gamma\left(2\kappa^{-1}\right)}\right]\left(\frac{\Gamma\left(\nu_1\right)+\Gamma\left(\nu_2\right)}{\Gamma\left(\nu_1\right)\Gamma\left(\nu_2\right)}\right)\int_0^1\left[\left(\frac{\left(\theta_f\right)^{y_{f1}^j+\nu_1-1}\left(1-\theta_f\right)^{y_{f2}^j+\nu_2-1}}{\left(\kappa^{-1}+\theta_f\gamma_{f1}^j+\left(1-\theta_f\right)\gamma_{f2}^j\right)^{2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j}}\right)\right] d\theta_f . \quad (4)$$

Pour obtenir une valeur de la probabilité jointe en (4), il faut estimer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\left(\theta_f\right)^{y_{f1}^j+\nu_1-1}\left(1-\theta_f\right)^{y_{f2}^j+\nu_2-1}}{\left(\kappa^{-1}+\theta_f\gamma_{f1}^j+\left(1-\theta_f\right)\gamma_{f2}^j\right)^{2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j}} d\theta_f$$

Pour ce faire, écrivons l'expression $\kappa^{-1}+\theta_f\gamma_{f1}^j+\left(1-\theta_f\right)\gamma_{f2}^j$ du dénominateur de la façon suivante :

$$\left(\kappa^{-1}+\gamma_{f2}^j\right)\left[1-\left(\frac{\gamma_{f2}^j-\gamma_{f1}^j}{\kappa^{-1}+\gamma_{f2}^j}\right)\theta_f\right],$$

ce qui nous permet de réécrire l'intégrale en (4) :

$$\int_0^1 \frac{\left(\theta_f\right)^{y_{f1}^j+\nu_1-1}\left(1-\theta_f\right)^{y_{f2}^j+\nu_2-1}}{\left(\left(\kappa^{-1}+\gamma_{f2}^j\right)\left[1-\left(\frac{\gamma_{f2}^j-\gamma_{f1}^j}{\kappa^{-1}+\gamma_{f2}^j}\right)\theta_f\right]\right)^{2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j}} d\theta_f = \left[\frac{\Gamma\left(y_{f1}^j+\nu_1\right)\Gamma\left(y_{f2}^j+\nu_2\right)}{\Gamma\left(y_{f1}^j+y_{f2}^j+\nu_1+\nu_2\right)}\right] {}_2F_1\left(y_{f1}^j+\nu_1; 2\kappa^{-1}+y_{f1}^j+y_{f2}^j; \nu_1+\nu_2+y_{f1}^j+y_{f2}^j; \left(\frac{\gamma_{f2}^j-\gamma_{f1}^j}{\kappa^{-1}+\gamma_{f2}^j}\right)\right).$$

${}_2F_1$ est une fonction hypergéométrique dont la valeur est égale à :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{\left(y_{f1}^{j}+\nu_{1}\right)^{[\ell]}\left(2\kappa^{-2}+\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}\right)^{[\ell]}}{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(y_{fi}^{j}+\nu_{i}\right)\right)^{[\ell]}}\times\frac{\left(\frac{\gamma_{f2}^{j}-\gamma_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\gamma_{f2}^{j}}\right)^{\ell}}{\ell!}\right],$$

avec $h^{[\ell]}=h(h-1)\cdots(h-\ell+1)$, une fonction factorielle décroissante.

La distribution du nombre d'accidents observés à la période *j* des deux véhicules de la flotte *f* est maintenant donnée par :

$$P\left(y_{f1}^{j},y_{f2}^{j}\right)=\frac{\left(\gamma_{f1}^{j}\right)^{y_{f1}^{j}}\left(\gamma_{f2}^{j}\right)^{y_{f2}^{j}}}{\Gamma\left(y_{f1}^{j}+1\right)\Gamma\left(y_{f2}^{j}+1\right)}\left[\frac{\Gamma\left(2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}\right)\kappa^{-2\kappa^{-1}}}{\Gamma\left(2\kappa^{-1}\right)}\right]\left(\frac{\Gamma(\nu_1)+\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}\right)$$

$$\times\frac{1}{\left(\kappa^{-1}+\gamma_{f2}^{j}\right)^{2\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}}}\left[\frac{\Gamma\left(y_{f1}^{j}+\nu_1\right)\Gamma\left(y_{f2}^{j}+\nu_2\right)}{\Gamma\left(y_{f1}^{j}+y_{f2}^{j}+\nu_1+\nu_2\right)}\right]{}_2F_1\left(y_{f1}^{j}+\nu_1;2\kappa^{-1}+y_{f1}^{j}+y_{f2}^{j};\nu_1+\nu_2+y_{f1}^{j}+y_{f2}^{j};\left(\frac{\gamma_{f2}^{j}-\gamma_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\gamma_{f2}^{j}}\right)\right).$$

Avant d'aborder l'estimation des paramètres de cette distribution par la méthode du maximum de vraisemblance, abordons sa généralisation à une flotte de I_f véhicules.

2.1.3. Transporteur ayant plus de 2 véhicules

Généralisons maintenant le modèle au cas d'une flotte de I_f véhicules. La distribution du nombre d'accidents à la période *j* des I_f véhicules de la flotte *f*, est donnée par :

$$P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\right)=\int_0^1\cdots\int_0^1 P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\mid\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1}\right)f\left(\theta_{f1}\cdots\theta_{fI_f}\right)d\theta_{f1}\cdots d\theta_{fI_f-1}. \qquad (5)$$

où :

$$\theta_{fI_f}=1-\sum_{i=1}^{I_f-1}\theta_{fi}.$$

Nous pouvons réécrire la probabilité conditionnelle dans (5) :

$$P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\mid\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1}\right)=\int_0^{\infty}P\left(Y_{f1}^{j},\cdots,Y_{fI_f}^{j}\mid\alpha_f,\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1}\right)f\left(\alpha_f\right)d\alpha_f$$

et en intégrant par rapport à α_f, nous obtenons une distribution binomiale négative dont la probabilité jointe conditionnelle d'accidents est égale à :

$$P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\mid\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1}\right)=\left[\prod_{i=1}^{I_f}\left(\frac{\left(\gamma_{f1}^{j}\right)^{y_{fi}^{j}}\left(\theta_{fi}\right)^{y_{fi}^{j}}}{\Gamma\left(y_{fi}^{j}+1\right)}\right)\right]\left[\frac{\kappa^{-I_f\kappa^{-1}}}{\Gamma\left(I_f\kappa^{-1}\right)}\right]\frac{\Gamma\left(I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}\right)}{\left(\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}\gamma_{fi}^{j}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}}. \quad (6)$$

Ainsi, en remplaçant $P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\mid\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1}\right)$ dans l'équation (5) par sa valeur donnée en (6) et en remplaçant la fonction de densité $f\left(\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f}\right)$ par la densité d'une Dirichlet de paramètres $\left(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{I_f}\right)$, nous obtenons l'expression suivante :

$$P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\right)$$
$$=\left[\prod_{i=1}^{I_f}\left(\frac{\left(\gamma_{fi}^{j}\right)^{y_{fi}^{j}}}{\Gamma\left(y_{fi}^{j}+1\right)}\right)\right]\frac{\kappa^{-I_f\kappa^{-1}}\Gamma\left(I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}\right)\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\nu_i\right)}{\Gamma\left(I_f\kappa^{-1}\right)\prod_{i=1}^{I_f}\Gamma\left(\nu_i\right)}\int_{\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}=1}\cdots\int\frac{\prod_{i=1}^{I_f}\left(\theta_{fi}\right)^{y_{fi}^{j}+\nu_i-1}}{\left(\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}\gamma_{fi}^{j}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}}d\theta_{f1}\cdots d\theta_{fI_f-1}. \quad (7)$$

Encore une fois, nous devons estimer l'intégrale à plusieurs dimensions :

$$\int_{\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}=1}\cdots\int\frac{\prod_{i=1}^{I_f}\left(\theta_{fi}\right)^{y_{fi}^{j}+\nu_i-1}}{\left(\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}\gamma_{fi}^{j}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}}d\theta_{f1}\cdots d\theta_{fI_f-1}$$

de l'équation (7) pour estimer les paramètres du modèle. Trois possibilités sont maintenant envisagées :

1. Une première possibilité qui simplifie beaucoup les calculs est de supposer que tous les γ_{fi}^{j} des I_f véhicules sont identiques. Sous cette hypothèse, l'intégrale multidimensionnelle de l'équation (7) est réduite à :

$$\frac{1}{\left(\left(\kappa^{-1}+\gamma_{f1}^{j}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}\right)}\int_{\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}=1}\cdots\int\prod_{i=1}^{I_f}\left(\theta_{fi}\right)^{y_{fi}^{j}+\nu_i-1}d\theta_{f1}\cdots d\theta_{fI_f-1}=\frac{\prod_{i=1}^{I_f}\Gamma\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}{\left(\left(\kappa^{-1}+\gamma_{f1}^{j}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}\right)\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)\right)}$$

   et la distribution jointe du nombre d'accidents à la période *j* des I_f véhicules de la flotte *f* est donnée par l'expression suivante :

$$P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\right)$$

$$=\left[\frac{\Gamma\left(I_f\kappa+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}\right)}{\Gamma(I_f\kappa)}\left(\frac{\kappa}{\kappa+\gamma_{f1}^{j}}\right)^{I_f\kappa}\left(\frac{\gamma_{f1}^{j}}{\kappa+\gamma_{f1}^{j}}\right)^{\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}\right]\left[\prod_{i=1}^{I_f}\left(\frac{\Gamma\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}{\Gamma\left(y_{fi}^{j}+1\right)\Gamma(\nu_i)}\right)\right]\left[\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\nu_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)\right)}\right]. \quad (8)$$

L'hypothèse de travail de ce premier scénario suppose implicitement que tous les véhicules de la flotte représentent des risques *a priori* identiques, ce qui est probablement une hypothèse très forte car, comme nous le verrons, plusieurs variables qui distinguent les véhicules et les habitudes de conduite des conducteurs sont significatives dans l'estimation des probabilités d'accident. Une autre possibilité est de diviser les véhicules en différents groupes homogènes de risque, comme le font les assureurs en classifiant les risques.

2. Sous cette deuxième possibilité, nous pouvons séparer les véhicules en deux groupes et définir $G_1=1,\cdots,g$ comme l'ensemble des véhicules du premier groupe avec $\gamma_{fg1}^{j}=\frac{\sum_{i=1}^{g}\gamma_{fi}^{j}}{g}$, et $G_2=g+1,\cdots,I_f$, comme l'ensemble des véhicules du deuxième groupe avec $\gamma_{fg2}^{j}=\frac{\sum_{i=g+1}^{I_f}\gamma_{fi}^{j}}{I_f-g}$. Ainsi, l'intégrale de l'équation (7) devient :

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\left[\prod_{i=1}^{g}(\theta_{fi})^{c_i-1}\prod_{i=g+1}^{I_f}(\theta_{fi})^{c_i-1}\right]}{\left(\kappa^{-1}+\gamma_{fg1}^{j}\sum_{i=1}^{g}\theta_{fi}+\gamma_{fg2}^{j}\sum_{i=g+1}^{I_f}\theta_{fi}\right)^{d}}\,d\theta_{f1}\cdots d\theta_{fI_f-1}$$

avec

$$c_i=y_{fi}^{j}+\nu_i \text{ et } d=I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}.$$

En posant

$$u_i=\frac{\theta_{fi}}{\sum_{i=1}^{g}\theta_{fi}}\quad i=1,\cdots,g-1\,;\; v=\sum_{i=1}^{g}\theta_{fi} \text{ et } w_i=\frac{\theta_{fi}}{1-\sum_{i=1}^{g}\theta_{fi}}\quad i=g+1,\cdots,I_f,$$

cette intégrale peut se réécrire de la façon suivante :

$$\int\cdots\int \frac{\left[\left[\prod_{i=1}^{g-1}\left(vu_i\right)^{c_i-1}\right]\left[\prod_{i=g+1}^{I_f-1}\left((1-v)\,w_i\right)^{c_i-1}\right]\left[v\left(1-\sum_{i=1}^{g-1}u_i\right)\right]^{c_g-1}\left[(1-v)\left(1-\sum_{i=g+1}^{I_f-1}w_i\right)\right]^{c_{I_f}-1}\right]}{\left(\left(\kappa^{-1}+\gamma_{fg1}^{j}\right)v+\left(\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}\right)(1-v)\right)^{d}}\, v^{g-1}\left(1-v\right)^{I_f-g-1}\,\mathrm{dudwdv}$$

$$=\left(\frac{\prod_{i=1}^{g}\Gamma\left(c_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{g}c_i\right)}\right)\left(\frac{\prod_{i=g+1}^{I_f}\Gamma\left(c_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=g+1}^{I_f}c_i\right)}\right)\frac{1}{\left(\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}\right)^{d}}\int_0^1 \frac{v^{\sum_{i=1}^{g}c_i-1}\left(1-v\right)^{\sum_{i=g+1}^{I_f}c_i-1}}{\left(1-\left[\frac{\left(\gamma_{fg2}^{j}-\gamma_{fg1}^{j}\right)}{\left(\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}\right)}\right]v\right)^{d}}\,dv$$

$$=\left(\frac{\prod_{i=1}^{I_f}\Gamma\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)\right)\left(\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}}\right){}_2F_1\left(\sum_{i=1}^{g}\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right),\left(I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}\right),\sum_{i=1}^{I_f}\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right),\left(\frac{\gamma_{fg2}^{j}-\gamma_{fg1}^{j}}{\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}}\right)\right) \qquad (9)$$

et en substituant l'équation (9) dans l'équation (7), la distribution du nombre d'accidents à la période *j* des I_f véhicules de la flotte *f* est donnée par :

$$P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\right)=$$

$$\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}+I_f\kappa^{-1}\right)}{\Gamma\left(I_f\kappa^{-1}\right)}\left(\frac{\kappa^{-1}}{\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}}\right)^{I_f\kappa^{-1}}\left(\frac{\gamma_{fg1}^{j}}{\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}}\right)^{\sum_{i=1}^{g}y_{fi}^{j}}\left(\frac{\gamma_{fg2}^{j}}{\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}}\right)^{\sum_{i=g+1}^{I_f}y_{fi}^{j}}\prod_{i=1}^{I_f}\left(\frac{\Gamma\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}{\Gamma\left(y_{fi}^{j}+1\right)\Gamma\left(\nu_i\right)}\right)\times\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\nu_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)\right)} \qquad (10)$$

$$\times{}_2F_1\left(\sum_{i=1}^{g}\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right),\left(I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}\right),\sum_{i=1}^{I_f}\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right),\left(\frac{\gamma_{fg2}^{j}-\gamma_{fg1}^{j}}{\kappa^{-1}+\gamma_{fg2}^{j}}\right)\right),$$

où ${}_2F_1$ est une fonction hypergéométrique telle que définie dans la section 2.1.2. Il est à noter que l'équation (8) est un cas particulier de l'équation (10). Cette façon de procéder pour estimer l'intégrale peut être généralisée à plusieurs groupes homogènes, mais il n'est pas évident que le gain de précision obtenu serait supérieur à celui correspondant à une approximation Monte Carlo de l'intégrale multivariée de l'équation (7). Nous abordons maintenant l'approximation Monte Carlo de cette intégrale.

3. Si nous voulons estimer l'intégrale

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 \frac{\left[\prod_{i=1}^{I_f}\left(\theta_{fi}\right)^{y_{fi}^{j}+\nu_i-1}\right]}{\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(\kappa^{-1}+\gamma_{fi}^{j}\right)\theta_{fi}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}}\,d\theta_{f1}\cdots d\theta_{fI_f-1}$$

par la méthode de Monte Carlo, nous pouvons utiliser la fonction d'importance $h(\underset{\sim}{\theta})$ (Lange, 1999) où $\underset{\sim}{\theta} = \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}$, telle que :

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 g(\underset{\sim}{\theta})\, d\underset{\sim}{\theta} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{g(\underset{\sim}{\theta})}{h(\underset{\sim}{\theta})} h(\underset{\sim}{\theta})\, d\underset{\sim}{\theta} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 w(\underset{\sim}{\theta}) h(\underset{\sim}{\theta})\, d\underset{\sim}{\theta} \approx \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} w(\underset{\sim}{\theta}^l)$$

avec

$$w(\underset{\sim}{\theta}) = \frac{g(\underset{\sim}{\theta})}{h(\underset{\sim}{\theta})}.$$

En posant :

$$h(\underset{\sim}{\theta}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j + \nu_i\right)}{\prod_{i=1}^{I_f} \Gamma\left(y_{fi}^j + \nu_i\right)} \prod_{i=1}^{I_f} (\theta_{fi})^{y_{fi}^j + \nu_i - 1},$$

nous pouvons réécrire l'expression de l'intégrale multivariée en multipliant son numérateur et son dénominateur par la fonction $h(\underset{\sim}{\theta})$ telle que définie plus haut et obtenir, après simplifications, l'expression suivante :

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{I_f} \left(\kappa^{-1} + \gamma_{fi}^j\right) \theta_{fi}\right)^{I_f \kappa^{-1} + \sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j} \dfrac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j + \nu_i\right)}{\prod_{i=1}^{I_f} \Gamma\left(y_{fi}^j + \nu_i\right)}} \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j + \nu_i\right)}{\prod_{i=1}^{I_f} \Gamma\left(y_{fi}^j + \nu_i\right)} \prod_{i=1}^{I_f} (\theta_{fi})^{y_{fi}^j + \nu_i - 1}\, d\theta_{f1} \cdots d\theta_{fI_f - 1}$$

qui peut être évaluée par :

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^{I_f} \Gamma\left(y_{fi}^j + \nu_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j + \nu_i\right)}\right) \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{I_f} \left(\kappa^{-1} + \gamma_{fi}^j\right) \theta_{fi}^l\right)^{I_f \kappa^{-1} + \sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j}}\right].$$

En fait, nous pouvons, par exemple, générer des nombres aléatoires, a_{fi}^{ℓ}, qui sont des valeurs de la densité gamma, $g\left(y_{fi}^j + \nu_i, 1\right)$, pour $i = 1, \ldots, I_f$ et $l = 1, \ldots, N$ où N est le nombre d'itérations de l'approximation de Monte Carlo. Ainsi, en posant $\theta_{fi}^{l}=\frac{a_{fi}^{l}}{\sum_{i=1}^{I_f} a_{fi}^{l}}$, nous obtenons des valeurs d'une Dirichlet ($y_{f1}^{j}+\nu_1,\cdots,y_{fI_f}^{j}+\nu_{I_f}$). La distribution du nombre d'accidents observés à la période j des I_f véhicules de la flotte f est donc approximativement égale à :

$$P\left(y_{f1}^{j},\cdots,y_{fI_f}^{j}\right)\approx$$

$$\left(\frac{\kappa^{\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^{j}}\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^{j}+I_f\kappa^{-1}\right)}{\Gamma\left(I_f\kappa^{-1}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\nu_i\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^{j}+\sum_{i=1}^{I_f}\nu_i\right)}\right)\prod_{i=1}^{I_f}\left(\frac{\left(\gamma_{fi}^{j}\right)^{y_{fi}^{j}}\Gamma\left(y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}{\Gamma\left(y_{fi}^{j}+1\right)\Gamma\left(\nu_i\right)}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(1+\kappa\gamma_{fi}^{j}\right)\theta_{fi}^{l}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^{j}}}\right)\right).$$

Dans la section qui suit nous présentons les résultats économétriques obtenus des deux premières formes d'approximation. Les résultats statistiques et les calculs des primes avec l'approche Monte Carlo sont présentés dans Angers, Desjardins et Dionne, 2003.

2.2. ESTIMATIONS ÉCONOMÉTRIQUES

2.2.1. Statistiques descriptives

Les données proviennent des fichiers de la Société d'assurance automobile du Québec (SAAQ) pour les années 1997 et 1998 (pour une description détaillée de la base de données voir Dionne, Desjardins et Pinquet, 1999a). Comme l'indique le tableau A, nous avons accès à des données de 43 679 transporteurs de marchandises par camion détenant des informations sur les deux années. Plus des deux tiers des transporteurs ne possèdent qu'un seul véhicule. Ces petits transporteurs détiennent environ 30 % des 103 848 camions lourds ayant au moins un jour d'autorisation de circuler au 31 décembre 1998 et au 31 décembre 1997. Nous utilisons les données de l'année 1998 pour les informations sur les accidents et les caractéristiques des véhicules et des flottes et celles de 1997 pour les infractions au code de la sécurité routière afin de respecter la politique de tarification de la SAAQ. De plus, cette façon de procéder diminue le problème de simultanéité entre les variables infractions et accidents.

Il faut mentionner qu'un véhicule n'a pas nécessairement 365 jours d'autorisation de circuler pour l'année 1998. On note, au Tableau B, qu'en moyenne, un véhicule a 88,5 % de l'année 1998 d'autorisation de circuler. Selon la taille de la flotte, ce pourcentage varie entre 86,7 % et 93,9 %. Pour obtenir une statistique annuelle, nous avons calculé le nombre de camions en camions-année, en sommant le nombre de jours d'autorisation de circuler de chaque camion et en divisant ensuite par 365 jours. Ainsi, pour l'année 1998, nous obtenons 91 919 camions-année. La fréquence moyenne d'accidents totaux par camion-année est de 0,1453. Cette moyenne augmente lorsque la taille de la flotte augmente, mais diminue lorsque la taille de la flotte est supérieure à 150 camions.

Tableau A : Nombre de véhicules ayant au moins un jour d'autorisation de circuler en 1998 et en 1997 par transporteur

Taille de la flotte	Nombre	%
1 véhicule	30 520	69,87
2 véhicules	6 128	14,03
3 véhicules	2 514	5,76
4 à 5 véhicules	2 095	4,80
6 à 9 véhicules	1 261	2,89
10 à 20 véhicules	772	1,77
21 à 50 véhicules	278	0,64
51 à 150 véhicules	82	0,19
151 à 400 véhicules	23	0,05
401 véhicules et plus	6	0,01
Total	**43 679**	**100,00**

Tableau B : Fréquence moyenne d'accidents totaux et fraction moyenne d'autorisation de circuler selon la taille de la flotte pour l'année 1998

Taille de la flotte	Nombre de camions	Nombre d'accidents pour l'année 1998		Nombre de camions-année	Fraction de l'année 1998 d'autorisation de circuler	
		Moyenne	Écart type		Moyenne	Écart type
1 véhicule	30 520	0,1110	0,4964	26 511,40	0,8687	0,2656
2 véhicules	12 256	0,1143	0,5501	10 710,15	0,8739	0,2624
3 véhicules	7 542	0,1417	0,5324	6 713,34	0,8901	0,2424
4 à 5 véhicules	9 175	0,1495	0,5428	8 232,14	0,8972	0,2393
6 à 9 véhicules	8 935	0,1705	0,5832	8 050,71	0,9010	0,2343
10 à 20 véhicules	10 307	0,1958	0,6470	9 309,25	0,9032	0,2345
21 à 50 véhicules	8 508	0,1849	0,6582	7 648,01	0,8989	0,2335
51 à 150 véhicules	6 635	0,2056	1,0120	5 764,08	0,8687	0,2853
151 à 400 véhicules	5 285	0,1380	0,5262	4 580,95	0,8668	0,2736
401 véhicules et +	4 685	0,1323	0,4342	4 399,13	0,9390	0,1912
Total	**103 848**	**0,1453**	**0,5940**	**91 919,17**	**0,8851**	**0,2527**

Le Tableau C regroupe les véhicules des flottes ayant 3 véhicules ou plus en fonction de la médiane du nombre moyen d'accidents. Deux groupes de risque (ceux dont le risque est supérieur à la médiane et ceux dont le risque est égal ou inférieur à la médiane) sont formés en prédisant les risques d'accident à l'aide des paramètres de la distribution binomiale négative estimés sur l'ensemble des véhicules des flottes de taille supérieure à deux camions. Les flottes peuvent avoir des camions dans les deux groupes de risque. Les deux groupes de risque construits seront utilisés pour l'approximation de l'intégrale multiple avec la fonction hypergéométrique. On remarque que seulement le quart des 7 031 flottes de taille supérieure à 2 véhicules ont l'ensemble de leurs véhicules dans un seul groupe de risque, ce qui implique qu'utiliser l'hypothèse que les camions sont tous *a priori* identiques est plutôt forte.

Tableau C : Répartition des flottes de taille supérieure à 2 véhicules et répartition des flottes dont les véhicules se retrouvent que dans un seul groupe de risque

Taille de la flotte	Nombre de flottes N1	Nombre de flottes n'ayant qu'un seul groupe N2	(N2/N1) %
3 véhicules	2 514	1 044	41,5
4 à 5 véhicules	2 095	543	25,9
6 à 9 véhicules	1 261	198	15,7
10 à 20 véhicules	772	72	9,3
21 à 50 véhicules	278	10	3,6
51 à 150 véhicules	82	6	7,3
151 à 400 véhicules	23	0	0,0
401 véhicules et plus	6	0	0,0
Total	**7 031**	**1 873**	**26,6**

2.2.2. Estimations des paramètres

Nous avons utilisé la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres inconnus, $\kappa^{-1}, \nu, \beta = (\beta_1 \quad , \cdots, \quad \beta_p)$. Nous avons appliqué un algorithme d'optimisation dans la procédure IML de SAS. Les résultats pour les flottes de taille 1 et 2 sont présentés au Tableau L en annexe. Le Tableau M (en annexe) donne les estimations des paramètres pour l'ensemble des véhicules. Pour cette dernière estimation, les véhicules ont été divisés en deux groupes de risque selon le nombre médian d'accidents par camion prédit par le modèle de la distribution binomiale négative. La matrice de variance-covariance a été estimée à partir de la sous-routine NLFPDD de SAS. Nous utilisons le seuil de 10 % (*p* inférieur ou égal à 0,10) pour considérer un coefficient statistiquement différent de zéro.

On note au Tableau L que les véhicules des transporteurs de taille 1 ayant plus d'expérience ont moins d'accidents (nombre d'années en tant que transporteur). Les résultats indiquent également que le secteur d'activité du transporteur, le type d'utilisation du véhicule, le type de carburant, le nombre de cylindres ainsi que le nombre d'essieux sont des facteurs explicatifs d'accidents. Les camions dont le secteur d'activité du transporteur est le camionnage public général sont moins à risque d'accident que ceux dont le secteur d'activité est le camionnage public en vrac. Les camions transportant des biens autres que du vrac sont plus à risque que ceux qui transportent des matières en vrac. Les camions qui utilisent de l'essence comme carburant ont moins d'accidents que ceux qui consomment du diesel et les véhicules ayant un moteur de 6 à 7 cylindres ont plus d'accidents que ceux de 8 ou plus de 10 cylindres. En ce qui concerne le nombre d'essieux qui supportent le véhicule, à l'exception du groupe 5 essieux, ceux ayant 4 essieux ou moins sont moins à risque d'accident que les véhicules ayant 6 essieux et plus. Les véhicules ayant une infraction commise en 1997, pour surcharge ou pour non-respect de la vérification mécanique (infractions flottes), sont plus à risque d'accident en 1998 que ceux qui n'ont pas ces types d'infraction. De plus, les véhicules dont les conducteurs ont accumulé des infractions entraînant des points d'inaptitudes en 1997 représentent des risques d'accident plus élevés en 1998 que ceux qui n'en ont pas. Ces paramètres ont été estimés à partir de données provenant de 30 520 transporteurs ou véhicules.

Il y a 6 128 transporteurs de taille 2, soit 12 256 camions lourds ayant au moins un jour d'autorisation de circuler pour l'année 1998 et également pour l'année 1997. On note au Tableau L que les véhicules des transporteurs de taille 2 ayant plus d'expérience ont moins d'accidents. Les résultats indiquent que le type de carburant, le nombre de cylindres ainsi que le nombre d'essieux sont des facteurs explicatifs d'accidents, une fois les autres facteurs pris en compte. Les véhicules dont les conducteurs ont commis une infraction en 1997 pour surcharge ou pour arrimage inadéquat sont plus à risque d'accident en 1998 que ceux qui n'ont pas respectivement ce type d'infractions. De plus, les véhicules ayant des infractions entraînant des points d'inaptitude en 1997 représentent des risques d'accident plus élevés en 1998 que ceux qui n'en ont pas. Il est à noter que les résultats des deux régressions son assez semblables.

Le tableau L rapporte également les résultats sur les paramètres des distributions des effets aléatoires. La régression des flottes de taille 1 indique que le paramètre κ^{-1} de la binomiale négative est significatif, ce qui veut dire que nous pouvons rejeter la distribution de Poisson et appliquer un modèle bonus-malus de tarification de l'assurance à ces flottes. La régression des flottes de taille 2 indique que les deux paramètres κ^{-1} et ν sont significatifs au seuil de 90 %, ce qui indique que les effets véhicules et les effets flottes peuvent être utilisés dans les calculs des primes des flottes de taille 2. On retrouve les mêmes résultats pour l'ensemble des camions dans le tableau M en annexe, qui présente les résultats de la régression pour l'ensemble des camions lourds.

On remarque également au tableau M que les véhicules des transporteurs ayant plus d'expérience enregistrent en moyenne moins d'accidents. On observe que les camions lourds dont le secteur d'activité du transporteur est celui de location à court terme sont plus à risque d'accident que ceux dont le secteur d'activité est le camionnage public en vrac. Les résultats indiquent également que les véhicules des plus grandes flottes enregistrent en moyenne plus d'accidents que ceux de taille 1, mais les coefficients des tailles supérieures à 149 sont inférieurs à ceux des tailles de 6 à 149 véhicules. Les véhicules ayant une infraction commise en 1997 pour surcharge, pour arrimage inadéquat ou pour non-respect de la vérification mécanique sont plus à risque d'accident en 1998 que ceux qui n'ont pas ces types d'infractions. De plus, les véhicules dont les conducteurs ont accumulé des infractions entraînant des points d'inaptitude en 1997 représentent des risques d'accident plus élevés en 1998 que ceux qui n'en ont pas. Ces coefficients seront très utiles pour estimer les risques *a priori* dans le calcul des primes d'assurance, alors que les coefficients κ^{-1} et ν le seront pour ajuster les primes selon les accidents passés des véhicules et des flottes dans le modèle bonus-malus.

3. BONUS-MALUS

3.1. SYSTÈME BONUS-MALUS OPTIMAL

Pour construire un système bonus-malus optimal (Lemaire, 1985; Dionne et Vanasse, 1989, 1992) basé sur le nombre d'accidents passés d'un camion ainsi que ceux de sa flotte, nous devons calculer la prime à la période t+1 en utilisant le rapport des espérances mathématiques suivant :

$$\gamma_{fi}^{t+1}\left(\frac{E\left(\theta_{fi}\alpha_f \mid y_f, X_f\right)}{E\left(\theta_{fi}\alpha_f\right)}\right).$$

Le terme γ_{fi}^{t+1} correspond à la partie de l'espérance mathématique obtenue des régressions économétriques. Il est égal à $d_{fi}^{t+1}e^{X_{fi}^{t+1}\beta}$ où d_{fi}^{t+1} est le nombre de jours que le véhicule *i* de la flotte *f* est autorisé à circuler à la période *t+1* divisé par le nombre de jours total de la période *t+1*. Comme déjà indiqué, c'est une mesure d'exposition au risque. La composante de régression correspond à $X_{fi}^{t+1}\beta$ où le vecteur des coefficients β a été estimé à l'aide des différents modèles économétriques et $X_{fi}^{t+1}=\left(x_{fi1}^{t+1},\cdots,x_{fip}^{t+1}\right)$ représente les *p* caractéristiques observables du camion *i* de la flotte *f* au début de la période *t+1*; ainsi $X_f=\left(X_{f1}^1,\cdots,X_{fI_f}^1,\cdots,X_{f1}^{t+1},\cdots,X_{fI_f}^{t+1}\right)$ donne les *p* caractéristiques de tous les camions de la flotte *f* jusqu'à la période *t+1*. Le vecteur $y_f=\left(y_{f1}^1,\cdots,y_{fI_f}^1,\cdots,y_{f1}^t,\cdots,y_{fI_f}^t\right)$ représente les accidents des véhicules de la flotte *f* jusqu'à la période *t* et $E\left(\theta_{fi}\alpha_f \mid y_f, X_f\right)$ désigne l'espérance mathématique des effets flotte et véhicule attribuables au véhicule *i*, étant donné l'expérience passée mesurée par les accidents accumulés au cours des *t* périodes précédentes. Comme nous le verrons, la modélisation proposée tiendra compte, à la fois, des accidents du véhicule *i* et de ceux de sa flotte *f*. Ces effets tiennent compte des facteurs non observables qui peuvent affecter les accidents des camions et des flottes : α_f est l'effet associé à la flotte *f* et θ_{fi} est le poids du camion *i* de la flotte *f* sur cet effet flotte. Finalement, $E\left(\theta_{fi}\alpha_f\right)$ donne l'espérance mathématique des deux effets attribuables au camion *i* non conditionnelle aux accidents. Pour calculer ces espérances mathématiques, nous utilisons les résultats économétriques de la section précédente qui ne rejettent pas l'hypothèse que θ_{fi} suit une distribution Dirichlet de paramètres $(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{I_f})$ et que α_f suit une distribution gamma de paramètres $\left(I_f\kappa^{-1},\kappa^{-1}\right)$.

L'équation précédente provient d'une analyse bayésienne de l'évolution des accidents dans le temps. Nous allons maintenant démontrer sa forme explicite sous les hypothèses de distribution statistique des deux effets aléatoires. Supposons que la vraie espérance mathématique du nombre d'accidents du camion *i* de la flotte *f* à la période *t+1* est égale à $\lambda_{fi}^{t+1}\left(X_f,\alpha_f,\theta_{fi}\right)$. Elle est une fonction du vecteur de caractéristiques observables du véhicule jusqu'à la période *t+1* et des facteurs aléatoires de la flotte α_f et du véhicule θ_{fi} que l'on suppose indépendants du temps.

L'estimateur optimal de cette espérance mathématique à la période *t+1,* $\hat{\lambda}_{fi}^{t+1}\left(y_f, X_f\right)$ étant donné les observations obtenues sur les accidents jusqu'à la période *t* et celles sur les caractéristiques jusqu'à la période *t+1*, peut être calculé de la façon suivante :

$$\hat{\lambda}_{fi}^{t+1}\left(y_f, X_f\right) = \gamma_{fi}^{t+1}\left(\frac{E\left(\alpha_f \theta_{fi} \mid y_f, X_f\right)}{E\left(\alpha_f\right) E\left(\theta_{fi}\right)}\right) = \gamma_{fi}^{t+1}\left(\frac{E\left(\theta_{fi} E\left(\alpha_f \mid \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}, y_f, X_f\right) \mid y_f, X_f\right)}{E\left(\alpha_f\right) E\left(\theta_{fi}\right)}\right)$$

où :

$$X_f = \left(X_{f1}^1, \cdots, X_{fI_f}^1, \cdots, X_{f1}^{t+1}, \cdots, X_{fI_f}^{t+1}\right) \text{ et } y_f = \left(y_{f1}^1, \cdots, y_{fI_f}^1, \cdots, y_{f1}^t, \cdots, y_{fI_f}^t\right).$$

Or, nous savons que :

$$E\left(\theta_{fi} E\left(\alpha_f \mid \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}, y_f, X_f\right) \mid y_f, X_f\right) = \int_{\sum_{i=1}^{I_f} \theta_{fi} = 1} \int E\left(\alpha_f \mid \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}, y_f, X_f\right) f\left(\theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f} \mid y_f, X_f\right) d\theta_{f1} \cdots d\theta_{fI_f}$$

avec :

$$f\left(\theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f} \mid y_f, X_f\right) = \frac{P\left(y_f \mid \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}, X_f\right) f\left(\theta_{f1} \cdots \theta_{fI_f}\right)}{\int_{\sum_{i=1}^{I_f} \theta_{fi} = 1} \int P\left(y_f \mid \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}, X_f\right) f\left(\theta_{f1} \cdots \theta_{fI_f}\right) d\theta_{f1} \cdots d\theta_{fI_f}}.$$

De même, nous pouvons calculer :

$$E\left(\alpha_f \mid y_f, X_f, \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}\right) = \int_0^\infty \alpha_f f\left(\alpha_f \mid y_f, X_f, \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}\right) d\alpha_f$$

avec :

$$f\left(\alpha_f \mid y_f, X_f, \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}\right) = \frac{P\left(y_f \mid \alpha_f, \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}, X_f\right) f\left(\alpha_f\right)}{\int_0^\infty P\left(y_f \mid \alpha_f, \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f}, X_f\right) f\left(\alpha_f\right) d\alpha_f}.$$

Regardons maintenant comment nous pouvons appliquer cette formule de tarification bayésienne aux transporteurs de différentes tailles.

3.1.1. Transporteur de taille 1

Dans cette situation, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$P\left(y_{f1}^{1},\cdots,y_{f1}^{t}\mid\alpha_f,X_{f1}^{1},\cdots,X_{f1}^{t+1}\right)=\prod_{j=1}^{t}\left[\frac{\left(\gamma_{f1}^{j}\alpha_f\right)^{y_{f1}^{j}}e^{-\gamma_{f1}^{j}\alpha_f}}{y_{f1}^{j}!}\right]=\left[\prod_{j=1}^{j}\frac{\left(\gamma_{f1}^{j}\right)^{y_{f1}^{j}}}{y_{f1}^{j}!}\right]\left[\left(\alpha_f\right)^{\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}}\right]\left[e^{-\left(\alpha_f\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}\right)}\right] \quad (11)$$

où y_{f1}^{t} indique les accidents du camion à la période *t***.** En appliquant le théorème de Bayes, nous avons que la fonction de densité de α_f, étant donné les accidents passés observés jusqu'à la période *t*, correspond à une densité gamma de paramètres $\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j},\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}\right)$ défini par:

$$f\left(\alpha_f\mid y_{f1}^{1},\cdots,y_{f1}^{t},X_{f1}^{1},\cdots,X_{f1}^{t+1}\right)=\frac{\left(\alpha_f\right)^{\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}+\kappa^{-1}-1}}{\Gamma\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}\right)}\left[e^{-\alpha_f\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}\right)}\right]\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}\right)^{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}}.$$

Ainsi, l'espérance mathématique de α_f, étant donné ses accidents passés observés jusqu'à la période *t*, est égale à :

$$E\left(\alpha_f\mid y_{f1}^{1},\cdots,y_{f1}^{t},\cdots,X_{f1}^{1},\cdots,X_{f1}^{t+1}\right)=\frac{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}}.$$

L'estimateur de l'espérance mathématique du nombre d'accidents du camion de la flotte *f* à la période *t+1*, étant donné ses accidents observés jusqu'à la période *t*, est égal à :

$$\gamma_{f1}^{t+1}\left(\frac{E\left(\alpha_f\mid y_{f1}^{1},\cdots,y_{f1}^{t},\cdots,X_{f1}^{1},\cdots,X_{f1}^{t+1}\right)}{E\left(\alpha_f\right)}\right)=\gamma_{f1}^{t+1}\left[\frac{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}}\right]. \quad (12)$$

L'équation (12) est la formule utilisée dans la littérature actuarielle (Lemaire, 1985; Dionne et Vanasse, 1989, 1992) pour les véhicules individuels et n'a pas à tenir compte de l'effet flotte, puisque la flotte c'est le véhicule.

3.1.2. Transporteur ayant 2 véhicules

Dans cette situation, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$P\left(y_f\mid\theta_f,\alpha_f,X_f\right)=\left[\prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{I_f}\frac{\left(\gamma_{fi}^{j}\right)^{y_{fi}^{j}}}{\Gamma\left(y_{fi}^{j}\right)}\right]\left[\left(\theta_f\right)^{\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}}\left(1-\theta_f\right)^{\sum_{j=1}^{t}y_{f2}^{j}}\right]\left[\left(\alpha_f\right)^{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}\right]\left[e^{-\left(\alpha_f\left(\theta_f\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}+(1-\theta_f)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}\right)\right)}\right] \quad (13)$$

où :

$$y_f = \left(y_{f1}^1, \cdots, y_{f1}^t, y_{f2}^1, \cdots, y_{f2}^t\right) \text{ et } X_f = \left(X_{f1}^1, \cdots, X_{f1}^{t+1}, X_{f2}^1, \cdots, X_{f2}^{t+1}\right).$$

.

Nous savons que la fonction de densité *a posteriori* de α_f, étant donné les accidents passés observés jusqu'à la période *t* et pour des valeurs fixées pour les effets aléatoires des 2 camions de la flotte *f*, correspond à une densité gamma de paramètres :

$$\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j + 2\kappa^{-1},\ \kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t} \gamma_{f1}^j + (1-\theta_f)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^j\right),$$

soit :

$$f\left(\alpha_f \mid y_f, X_f, \theta_f\right) = \left(\alpha_f\right)^{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j + 2\kappa^{-1} - 1}\left[e^{-\alpha_f\left(\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^j + (1-\theta_f)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^j\right)}\right]\frac{\left(\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^j + (1-\theta_f)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^j\right)^{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j + 2\kappa^{-1}}}{\Gamma\left(2\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j\right)}.$$

L'espérance mathématique de α_f, étant donné les accidents passés observés jusqu'à la période *t* et pour des valeurs fixées pour les effets aléatoires des 2 camions de la flotte *f*, est égale à :

$$E\left(\alpha_f \mid y_f, X_f, \theta_f\right) = \frac{2\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j}{\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^j + (1-\theta_f)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^j}. \tag{14}$$

De plus, la fonction de densité de θ_f, étant donné les accidents passés observés jusqu'à la période *t* des 2 camions de la flotte *f*, est égale à :

$$f\left(\theta_f \mid y_f, X_f\right) = D \times \frac{\left[\left(\theta_f\right)^{\nu_1 - 1 + \sum_{j=1}^{t} y_{f1}^j}\left(1-\theta_f\right)^{\nu_2 - 1 + \sum_{j=1}^{t} y_{f2}^j}\right]}{\left(\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^j + (1-\theta_f)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^j\right)^{2\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j}} \tag{15}$$

où :

$$D^{-1} = \frac{\prod_{i=1}^{2}\Gamma\left(\nu_i + \sum_{j=1}^{t} y_{fi}^j\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\nu_i + \sum_{j=1}^{t} y_{fi}^j\right)\right)\left(\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^j\right)^{2\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j}} \times {}_2F_1\left(\nu_1 + \sum_{j=1}^{t} y_{f1}^j; 2\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^j; \sum_{i=1}^{2}\left(\nu_i + \sum_{j=1}^{t} y_{fi}^j\right); \frac{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^j - \sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^j}{\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^j}\right)$$

L'estimateur de l'espérance mathématique du nombre d'accidents du camion *i* de la flotte *f* à la période *t+1*, étant donné les accidents observés jusqu'à la période *t* des 2 véhicules de la flotte *f*, est donc égal à :

$$\gamma_{fi}^{t+1} E\left(\alpha_f \theta_{fi} \mid y_f, X_f\right) = \gamma_{fi}^{t+1}\left(2\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^{j}\right) E\left(\frac{\theta_{fi}}{\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t} \gamma_{f1}^{j} + \left(1-\theta_f\right)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}} \mid y_f, X_f\right)$$

avec :

$$\theta_{fi} = \theta_f \quad \text{si } \ i = 1 \qquad \text{et} \qquad 1-\theta_f \ \text{ si } \ i = 2.$$

Il nous reste à calculer l'expression :

$$E\left(\frac{\theta_{fi}}{\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t} \gamma_{f1}^{j} + \left(1-\theta_f\right)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}} \mid y_f, X_f\right).$$

Or, par définition,

$$E\left(\frac{\theta_{fi}}{\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t} \gamma_{f1}^{j} + \left(1-\theta_f\right)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}} \mid y_f, X_f\right) = \int \frac{\theta_{fi}}{\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t} \gamma_{f1}^{j} + \left(1-\theta_f\right)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}} f\left(\theta_f \mid y_f, X_f\right) d\theta_f \cdot$$

En remplaçant $f\left(\theta_f \mid y_f, X_f\right)$ par sa valeur donnée dans (15), nous obtenons que :

$$E\left(\frac{\theta_{fi}}{\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t} \gamma_{f1}^{j} + \left(1-\theta_f\right)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}} \mid y_f, X_f\right) = D\int \frac{\theta_{fi}\left[\left(\theta_f\right)^{v_1 - 1 + \sum_{j=1}^{t} y_{f1}^{j}} \left(1-\theta_f\right)^{v_2 - 1 + \sum_{j=1}^{t} y_{f2}^{j}}\right]}{\left(\kappa^{-1} + \theta_f \sum_{j=1}^{t} \gamma_{f1}^{j} + \left(1-\theta_f\right)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}\right)^{2\kappa^{-1} + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^{j} + 1}} d\theta_f$$

En calculant l'intégrale, nous pouvons obtenir :

$$E\left(\frac{\theta_{fi}}{\kappa^{-1}+\theta_f\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}+(1-\theta_f)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}}\mid y_f, X_f\right)$$

$$=\left[\frac{\left(\nu_i+\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}\right)}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}}\right]\left[\frac{{}_2F_1\left(I+\nu_1+\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j};1+2\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j};1+\sum_{i=1}^{2}\left(\nu_i+\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}\right);\frac{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}}\right)}{\sum_{i=1}^{2}\left(\nu_i+\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}\right)\times{}_2F_1\left(\nu_1+\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j};2\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j};\sum_{i=1}^{2}\left(\nu_i+\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}\right);\frac{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}}\right)}\right] \quad (16)$$

avec :

$$\theta_{fi}=\theta_f \quad \text{si} \;\; i=1 \qquad \text{et} \qquad 1-\theta_f \;\; \text{si} \;\; i=2$$

et la fonction indicatrice

$$I=\begin{cases}1 & \text{si } i=1\\ 0 & \text{si } i=2\end{cases}.$$

Donc, l'estimateur optimal du véhicule *i*, $\hat{\lambda}_{fi}^{t+1}$, est égal à :

$$\gamma_{fi}^{t+1}\left(\frac{E(\theta_{fi}\alpha_f\mid y_f,X_f)}{E(\alpha_f)E(\theta_{fi})}\right)=\gamma_{fi}^{t+1}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}+2\kappa^{-1}\right)\frac{1}{2}\times\frac{\nu_i}{\nu_1+\nu_2}E\left(\frac{\theta_{fi}}{\kappa^{-1}+\theta_f\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fi}^{j}+(1-\theta_f)\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}}\mid y_f,X_f\right)$$

$$=\gamma_{fi}^{t+1}\times\frac{1}{2}\times\frac{\nu_i}{\nu_1+\nu_2}\left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}+\kappa^{-1}}\right]\left[\frac{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}+2\kappa^{-1}}{\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}\right]\left[\frac{{}_2F_1\left(\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}+\nu_1+I;\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}+2\kappa^{-1}+1;\sum_{i=1}^{2}\left(\nu_i+\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}\right)+1;\frac{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}}\right)}{{}_2F_1\left(\sum_{j=1}^{t}y_{f1}^{j}+\nu_1;\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2}y_{fi}^{j}+2\kappa^{-1};\sum_{i=1}^{2}\left(\nu_i+\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}\right);\frac{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f2}^{j}}\right)}\right]$$

avec :

$$\theta_{fi}=\theta_f \quad \text{si} \;\; i=1 \qquad \text{et} \qquad 1-\theta_f \;\; \text{si} \;\; i=2$$

et la fonction indicatrice :

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i = 2 \end{cases}.$$

On remarque que pour chaque véhicule *i*, l'estimateur optimal des accidents à la période *t+1* est fonction des paramètres observables au moment du renouvellement de la police d'assurance à la période *t+1,* des accidents du véhicule *i* accumulés au cours des *t* périodes précédentes, des accidents totaux de la flotte sur les mêmes périodes, des caractéristiques observables des deux véhicules au cours des *t* périodes précédentes et des paramètres des distributions gamma et Dirichlet. Nous appliquerons cette formule à nos données dans la section 4. Mais auparavant, regardons comment il est possible de généraliser cette formule de tarification de l'assurance à une flotte de I_f véhicules.

3.1.3. Transporteur ayant plus de 2 véhicules

Cette section est divisée en trois sous-sections qui correspondent aux trois hypothèses d'approximation de l'intégrale multiple discutées dans la section 2.1.3.

3.1.3.1. Tous les γ_{fi}^{j} des I_f véhicules sont identiques

Dans cette situation, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} P\left(y_f \mid \theta_{f1}, \cdots, \theta_{fI_f-1}, \alpha_f, X_f\right) &= \prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{I_f}\left[\frac{\left(\gamma_f^j \theta_{fi}\alpha_f\right)^{y_{fi}^j} e^{-\gamma_f^j\theta_{fi}\alpha_f}}{y_{fi}^j!}\right] \\ &= \left[\prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{I_f}\frac{\left(\gamma_f^j\right)^{y_{fi}^j}}{y_{fi}^j!}\right]\left[\prod_{i=1}^{I_f}\left(\theta_{fi}\right)^{\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^j}\right]\left[\left(\alpha_f\right)^{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j}\right]\left[e^{-\left(\alpha_f \sum_{j=1}^{t}\gamma_f^j\right)}\right] \end{aligned} \tag{17}$$

où :

$$X_f = \left(X_{f1}^1, \cdots, X_{fI_f}^1, \cdots, X_{f1}^{t+1}, \cdots, X_{fI_f}^{t+1}\right) \text{ et } y_f = \left(y_{f1}^1, \cdots, y_{fI_f}^1, \cdots, y_{f1}^t, \cdots, y_{fI_f}^t\right).$$

L'estimateur optimal $\hat{\lambda}_{fi}^{t+1}$ est donc égal à :

$$\frac{\gamma_{fi}^{t+1} E\left(\theta_{fi}\alpha_f \mid y_f, X_f\right)}{E\left(\theta_{fi}\alpha_f\right)} = \gamma_{fi}^{t+1}\left(\frac{\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^j + \nu_i}{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{f1}^j + \kappa^{-1}}\right)\left(\frac{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j + I_f\kappa^{-1}}{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j + \sum_{i=1}^{I_f}\nu_i}\right)\frac{\sum_{i=1}^{I_f}\nu_i}{I_f\nu_i}. \tag{18}$$

Cette formule se compare assez bien avec celle présentée dans l'équation (12) pour un transporteur ayant un seul véhicule. Ici, comme tous les véhicules sont identiques en fonction des variables observables, ce sont principalement les variables d'expérience qui différencient les deux formules. D'une part, tous les accidents de la flotte interviennent et, d'autre part, le poids des accidents passés tient compte des paramètres de la distribution Dirichlet, sur une base individuelle ν_i pour le véhicule et sur une base agrégée $\sum_{i=1}^{I_f} \nu_i$ pour tous les véhicules.

3.1.3.2. Regrouper les véhicules en 2 groupes

Si maintenant nous avons des véhicules différents, nous pouvons former des groupes ayant des caractéristiques ou des risques homogènes pour obtenir une formule explicite. En fait, les assureurs forment des classes de risque plus on moins homogènes en utilisant différentes variables de classification comme le type de voiture, le territoire… L'expérience passée sert à préciser les différences qui ne sont pas observables, *a priori*. Si nous nous limitons à deux groupes, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} P\left(y_f \mid \theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1},\alpha_f,X_f\right) &= \prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{I_f}\left[\frac{\left(\gamma_{fi}^j\theta_{fi}\alpha_f\right)^{y_{fi}^j} e^{-\gamma_{fi}^j\theta_{fi}\alpha_f}}{y_{fi}^j\,!}\right] \\ &= \prod_j\left(\left(\prod_i \frac{1}{y_{fi}^j\,!}\right)\left(\gamma_{fg1}^j\right)^{\sum_{i=1}^{g} y_{fi}^j}\left(\gamma_{fg2}^j\right)^{\sum_{i=g+1}^{I_f} y_{fi}^j}\right)\left[\prod_{i=1}^{I_f}\left(\theta_{fi}\right)^{\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^j}\right]\left[\left(\alpha_f\right)^{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f} y_{fi}^j}\right]\left[e^{-\left(\alpha_f\left(\sum_j \gamma_{fg1}^j \sum_{i=1}^{g}\theta_{fi}+\sum_j \gamma_{fg2}^j \sum_{i=g+1}^{I_f}\theta_{fi}\right)\right)}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

avec

$$\gamma_{fg1}^j = \left(\frac{\sum_{i=1}^{g}\gamma_{fi}^j}{g}\right) \quad \text{et} \quad \gamma_{fg2}^j = \left(\frac{\sum_{i=g+1}^{I_f}\gamma_{fi}^j}{I_f-g}\right)$$

pour les deux groupes respectivement.

L'estimateur optimal $\hat{\lambda}_{fi}^{t+1}$ est donc égal à :

$$\gamma_{fi}^{t+1}\left(\frac{E\left(\theta_{fi}\alpha_f \mid y_f, X_f\right)}{E(\alpha_f)E(\theta_{fi})}\right)=\gamma_{fi}^{t+1}\left(\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+I_f\kappa^{-1}\right)\frac{1}{I_f}\times\frac{\nu_i}{\sum_{i=-1}^{I_f}\nu_i}E\left(\frac{\theta_{fi}}{\kappa^{-1}+\gamma_{fg1}^{j}\sum_{m=1}^{g}\theta_{fm}+\gamma_{fg2}^{j}\sum_{m=g+1}^{I_f}\theta_{fm}}\mid y_f, X_f\right)$$

$$=\gamma_{fi}^{t+1}\times\frac{1}{I_f}\times\frac{\nu_i}{\sum_{i=-1}^{I_f}\nu_i}\left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fg2}^{j}+\kappa^{-1}}\right]\left[\frac{\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+I_f\kappa^{-1}}{\sum_{i=1}^{I_f}\left(\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}\right]\left[\frac{{}_2F_1\left(\sum_{i=1}^{g}\left(\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+\nu_i\right)+I;\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+I_f\kappa^{-1}+1;\sum_{i=1}^{I_f}\left(\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+\nu_i\right)+1;\frac{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fg2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fg1}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fg2}^{j}}\right)}{{}_2F_1\left(\sum_{i=1}^{g}\left(\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+\nu_i\right);\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+I_f\kappa^{-1};\sum_{i=1}^{I_f}\left(\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}+\nu_i\right);\frac{\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fg2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fg1}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fg2}^{j}}\right)}\right]$$

où la fonction indicatrice :

$$I=\begin{cases}1 & \text{si le camion appartient au groupe 1}\\ 0 & \text{si le camion appartient au groupe 2.}\end{cases}$$

Cette formule est très difficile à généraliser à plus de deux groupes. Si la flotte possède plusieurs groupes de véhicules plus ou moins homogènes, il peut être plus avantageux de s’en remettre à une approche par simulations de Monte Carlo.

3.1.3.3. Approche par simulations de Monte Carlo

Dans le cas général, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$P\left(y_f,\mid\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1},\alpha_f,X_f\right)=\left[\prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{I_f}\left(\frac{\left(\gamma_{fi}^{j}\right)^{y_{fi}^{j}}}{\Gamma\left(y_{fi}^{j}+1\right)}\right)\right]\left[\prod_{i=1}^{I_f}(\theta_{fi})^{\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}}\right]\left[(\alpha_f)^{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}\right]\left[e^{-\left(\alpha_f\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fi}^{j}\right)}\right] \tag{20}$$

où :

$$X_f=\left(X_{f1}^{1},\cdots,X_{fI_f}^{1},\cdots,X_{f1}^{t+1},\cdots,X_{fI_f}^{t+1}\right)\ \text{et}\ y_f=\left(y_{f1}^{1},\cdots,y_{fI_f}^{1},\cdots,y_{f1}^{t},\cdots,y_{fI_f}^{t}\right).$$

Nous avons également que :

$$E\left(\alpha_f\mid y_f,X_f,\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1}\right)=\frac{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}}{\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fi}^{j}} \tag{21}$$

et

$$f\left(\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f-1}\mid y_f,X_f\right)=\frac{\left[\dfrac{\prod_{i=1}^{I_f}\left(\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fi}^{j}\right)\theta_{fi}\right)^{\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\nu_i-1}}{\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fi}^{j}\right)\theta_{fi}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}}}\right]}{\int\limits_{\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}=1}\cdots\int\left[\dfrac{\prod_{i=1}^{I_f}\left(\left(\kappa^{-1}+\right)\theta_{fi}\right)^{\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\nu_i-1}}{\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fi}^{j}\right)\theta_{fi}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}}}\right]} \tag{22}$$

Nous pouvons estimer l'intégrale multiple :

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\left[\prod_{i=1}^{I_f}\left(\theta_{fi}\right)^{\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\nu_i-1}\right]}{\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fi}^{j}\right)\theta_{fi}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}}}\,d\theta_{f1}\cdots d\theta_{fI_f-1}$$

de l'équation (22) par la méthode de Monte Carlo en utilisant la fonction d'importance (de pondération) $h\left(\underset{\sim}{\theta}\right)$ où $\underset{\sim}{\theta}=\theta_{f1},\cdots,\theta_{fI_f}$ telle que :

$$\int\limits_{\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}=1}\cdots\int g\left(\underset{\sim}{\theta}\right)d\underset{\sim}{\theta}=\int\limits_{\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}=1}\cdots\int\frac{g\left(\underset{\sim}{\theta}\right)}{h\left(\underset{\sim}{\theta}\right)}h\left(\underset{\sim}{\theta}\right)d\underset{\sim}{\theta}=\int\limits_{\sum_{i=1}^{I_f}\theta_{fi}=1}\cdots\int w\left(\underset{\sim}{\theta}\right)h\left(\underset{\sim}{\theta}\right)d\underset{\sim}{\theta}\approx\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}w\left(\underset{\sim}{\theta}_{\ell}\right)$$

avec

$$w\left(\underset{\sim}{\theta}\right)=\frac{g\left(\underset{\sim}{\theta}\right)}{h\left(\underset{\sim}{\theta}\right)}.$$

En posant :

$$h\left(\underset{\sim}{\theta}\right)=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{I_f}\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\nu_i\right)\right)}{\prod_{i=1}^{I_f}\Gamma\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\nu_i\right)}\prod_{i=1}^{I_f}\left(\theta_{fi}\right)^{\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\nu_i-1},$$

l'estimateur optimal $\hat{\lambda}_{fi}^{t+1}$ est approximativement égal à :

$$\gamma_{fi}^{t+1}\left(\frac{E\left(\theta_{fi}\alpha_f \mid y_f, X_f\right)}{E\left(\theta_{fi}\alpha_f\right)}\right) \approx \gamma_{fi}^{t+1}\left(\frac{\left(I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}\right)}{I_f}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{I_f}\nu_i}{\nu_i}\right)\left[\frac{\sum_{\ell=1}^{N}\left(\frac{\theta_{\ell fi}}{\left(\sum_{m=1}^{I_f}\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fm}^{j}\right)\theta_{\ell fm}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+1}}\right)}{\sum_{\ell=1}^{N}\left(\frac{1}{\left(\sum_{m=1}^{I_f}\left(\kappa^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\gamma_{fm}^{j}\right)\theta_{\ell fm}\right)^{I_f\kappa^{-1}+\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}}}\right)}\right] \tag{23}$$

avec

$$\theta_{\ell fi} = \frac{a_{\ell fi}}{\sum_{i=1}^{I_f} a_{\ell fi}}$$

où les $a_{\ell fi}$ sont des valeurs d'une Gamma :

$$G\left(\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} + \nu_i, 1\right) \text{ pour } i = 1, \dots, I_f \text{ et } \ell = 1, \dots, N,$$

par exemple. Voir Angers, Desjardins et Dionne (2003) pour plus de détails.

4. APPLICATION DU SYSTÈME BONUS-MALUS

Dans cette section, nous proposons des tables de primes sur quelques années, représentant des extensions à celles proposées dans la littérature sur l'assurance automobile pour des véhicules individuels. Étant donné que nous n'avons pas modélisé la distribution conditionnelle des coûts des réclamations, nous supposons que le coût moyen des réclamations est de 10 000 \$ ce qui représente une valeur raisonnable en Amérique du Nord pour des accidents impliquant des camions (Dionne et al., 1999b).

4.1. FLOTTE DE TAILLE 1

Le Tableau D donne un exemple d'évaluation de primes d'un camion d'une flotte de taille 1. Ce type de tableau est similaire à ceux proposées par Dionne et Vanasse (1989, 1992). La première ligne du Tableau D donne le cumul des accidents du camion dans le temps. Ces accidents peuvent se produire ou non durant les huit périodes considérées. Le maximum indiqué est de 3 accidents mais il pourrait être plus élevé, même si seulement 0,15 % des camions ont cumulé 3 accidents et plus en un an. Nous supposons que le risque *a priori* est de 0,111 à chaque période, mais le modèle permet une modification de ce risque dans le temps si des caractéristiques significatives changent dans le temps, comme les points d'inaptitude pour des infractions à la sécurité routière, par exemple. Nous supposons qu'il s'agit d'un nouveau client et nous fixons son facteur bonus-malus (BMF) égal à 1, puisque nous ne pouvons pas tenir compte de son expérience passée. Sa prime à la première période est donc égale à 1 110 \$, soit 0,111×1×10 000 \$. Les colonnes suivantes donnent les variations des primes selon que le camion ait eu ou non un ou plusieurs accidents et selon la répartition de ces accidents dans le temps. La valeur estimée du paramètre de la distribution gamma est égale à $\hat{\kappa}^{-1} = 0,9680$ (voir Tableau L). À la période 1, la prime du camion *i* baisse à 996 \$ ($\text{BMF} = \left[\frac{0,9680+0}{0,9680+0,111}\right] = 0,897$) si le camion n'a pas d'accident et augmente jusqu'à 4 082 \$ si ce dernier cumule 3 accidents ($\text{BMF} = \left[\frac{0,9680+3}{0,9680+0,111}\right] = 3,677$). Si après trois ans il a cumulé trois accidents, sa prime sera de 3 385 \$ à la quatrième année quelle que soit la répartition des accidents dans le temps. Par contre, le total des primes payées sur les quatre ans sera beaucoup plus élevé si les accidents sont concentrés à la première période.

Tableau D : Table de primes d'assurance des véhicules appartenant à une flotte de taille 1

		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 0$		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 1$		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 2$		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 3$	
t	γ_{fi}^{t+1}	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$
0	0,111	1,000	1 110 \$						
1	0,111	0,897	996 \$	1,824	2 025 \$	2,751	3 053 \$	3,677	4 082 \$
2	0,111	0,813	903 \$	1,654	1 836 \$	2,494	2 768 \$	3,334	3 701 \$
3	0,111	0,744	826 \$	1,513	1 679 \$	2,281	2 532 \$	3,050	3 385 \$
4	0,111	0,686	761 \$	1,394	1 547 \$	2,102	2 333 \$	2,810	3 119 \$
5	0,111	0,636	706 \$	1,292	1 434 \$	1,949	2 163 \$	2,605	2 892 \$
6	0,111	0,592	658 \$	1,204	1 337 \$	1,816	2 016 \$	2,428	2 696 \$
7	0,111	0,555	616 \$	1,128	1 252 \$	1,701	1 888 \$	2,274	2 524 \$
8	0,111	0,522	579 \$	1,060	1 177 \$	1,599	1 775 \$	2,138	2 373 \$

4.2. FLOTTE DE 2 CAMIONS

Le tableau E présente un exemple de calcul de primes pour un camion appartenant à une flotte de deux camions. La première ligne du tableau (Accidents de la flotte) donne le cumul des accidents de la flotte sur neuf ans. Le maximum indiqué est de 2 accidents mais il pourrait être plus élevé. La deuxième ligne (Accidents du camion) donne le cumul des accidents du camion considéré. Par exemple, à la troisième colonne où la flotte cumule deux accidents, le camion qui nous concerne peut avoir eu 0, 1 ou 2 accidents. Donc chaque scénario de primes correspondant dépend de l'expérience propre au camion et de celle de la flotte. Si nous supposons que $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, un camion a un facteur bonus-malus (BMF) égal à :

$$\mathrm{BMF}=\left[\frac{\left(\hat{\nu}+\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}\right)}{\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{f2}^{j}}\right]\left[\frac{2\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}}{2\hat{\nu}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}}\right]\left[\frac{{}_2F_1\left(I+\hat{\nu}+\sum_{j=1}^{t} y_{f1}^{j};1+2\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j};1+2\hat{\nu}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j};\frac{\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{f2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{f1}^{j}}{\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{f2}^{j}}\right)}{{}_2F_1\left(\hat{\nu}+\sum_{j=1}^{t} y_{f1}^{j};2\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j};2\hat{\nu}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j};\frac{\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{f2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{f1}^{j}}{\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{f2}^{j}}\right)}\right],$$

où la fonction indicatrice est égale à :

$$I=\begin{cases}1 & \text{si } i=1\\ 0 & \text{si } i=2\end{cases}.$$

Les valeurs estimées des paramètres sont égales à $\hat{\kappa}^{-1}=0,6886$ et $\hat{\nu}=3,3067$. Ces estimations proviennent du modèle pour les véhicules de flottes de taille 2 (voir Tableau L). Prenons la colonne « aucun accident » pour la flotte et le camion. On remarque que la prime du camion baisse dans le temps. La colonne suivante donne les variations des primes si la flotte a un accident et selon que le camion ait eu ou non l'accident. On remarque que la prime du camion augmente par rapport à la première colonne, même si celui-ci n'a pas eu d'accident, car il est pénalisé par l'effet flotte. Par contre, l'augmentation est inférieure à celle correspondant au fait qu'il ait eu l'accident.

Tableau E : Table de primes d'assurance d'un véhicule appartenant à une flotte de taille 2

Accidents de la flotte		$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^{j}=0$		$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^{j}=1$				$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{2} y_{fi}^{j}=2$					
Accidents du camion		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}=0$		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}=0$		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}=1$		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}=0$		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}=1$		$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j}=2$	
t	γ_{fi}^{t+1}	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF $\times$ 10 000 $	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF $\times$ 10 000 $	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF $\times$ 10 000 $	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF $\times$ 10 000 $	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF $\times$ 10 000 $	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF $\times$ 10 000 $
0	0,114	1,000	1 143 $										
1	0,114	0,858	980 $	1,286	1 470 $	1,675	1 914 $	1,615	1 846 $	2,103	2 404 $	2,591	2 962 $
2	0,114	0,751	858 $	1,126	1 287 $	1,466	1 676 $	1,414	1 616 $	1,841	2 104 $	2,269	2 593 $
3	0,114	0,668	763 $	1,001	1 144 $	1,304	1 490 $	1,257	1 437 $	1,637	1 871 $	2,017	2 306 $
4	0,114	0,601	687 $	0,901	1 030 $	1,174	1 341 $	1,132	1 293 $	1,474	1 684 $	1,816	2 076 $
5	0,114	0,546	625 $	0,819	937 $	1,067	1 220 $	1,029	1 176 $	1,340	1 532 $	1,651	1 887 $
6	0,114	0,501	573 $	0,751	859 $	0,978	1 118 $	0,943	1 078 $	1,229	1 404 $	1,514	1 730 $
7	0,114	0,463	529 $	0,694	793 $	0,903	1 032 $	0,871	995 $	1,134	1 296 $	1,398	1 598 $
8	0,114	0,430	491 $	0,644	736 $	0,839	959 $	0,809	924 $	1,053	1 204 $	1,298	1 484 $
9	0,114	0,401	458 $	0,601	687 $	0,783	895 $	0,755	863 $	0,983	1 124 $	1,212	1 385 $

4.3. FLOTTE DE PLUSIEURS CAMIONS

4.3.1. Tous les véhicules de la flotte ont les mêmes caractéristiques observables

Dans cette situation, la prime d'assurance estimée d'un camion *i* appartenant à un transporteur *f* est donnée par :

$$\hat{\gamma}_{fi}^{t+1}\left[\frac{I_f\hat{\kappa}+\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}{I_f\hat{\nu}+\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}\right]\left[\frac{\hat{\nu}+\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}}{\hat{\tau}+\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{fi}^{j}}\right]\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}}=\hat{\gamma}_{fi}^{t+1}\mathrm{BMF}$$

où le :

$$\mathrm{BMF}=\left[\frac{I_f\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}{I_f\hat{\nu}+\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{I_f}y_{fi}^{j}}\right]\left[\frac{\hat{\nu}+\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}}{\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\hat{\gamma}_{fi}^{j}}\right],$$

avec :

$$\hat{\kappa}^{-1}=0,3605 \text{ et } \hat{\nu}=2,0438 \quad \text{(voir Tableau M).}$$

4.3.2. Exemple d'une flotte de 10 camions identiques

Le tableau F présente cet exemple. Supposons que le cumul des accidents du transporteur durant la prochaine période est 2, avec 6 camions ne cumulant aucun accident et n'ayant aucune infraction pour excès de vitesse ; 2 camions ne cumulant aucun accident mais ayant une infraction pour excès de vitesse ; 1 camion cumulant un accident et n'ayant aucune infraction pour excès de vitesse et 1 camion cumulant un accident et ayant une infraction pour excès de vitesse. En supposant toujours que le coût moyen des réclamations est de 10 000 \$, la prime d'assurance *a priori* d'un véhicule lorsque l'on ne tient pas compte de l'expérience passée est établie à 1 850 \$ (0,185×1×10 000 \$). Comme tous les véhicules de la flotte sont identiques en terme de risque observable, ils ont le même $\gamma_{fi}^{t}=0,185$ et un BMF égal à 1 au début du contrat d'assurance. La prime totale pour la flotte est établie à 18 500\$ (10×185 \$). À la période suivante *(t+1)*, les primes d'assurance pour chacun des historiques des véhicules de la flotte à la période suivante sont données dans le tableau F.

Tableau F : Table de primes d'assurance des véhicules appartenant à une flotte de taille 10 lorsque le cumul des accidents de la flotte est 2 sur un an

γ_{fi}^{t}	*Cumul des accidents*	*Infraction pour excès de vitesse*	γ_{fi}^{t+1}	BMF	γ_{fi}^{t+1}BMF $\times$ 10 000$	*Nombre de camions*	
0,185	1	1	0,324	1,394	4 517 $	1	4 517 $
0,185	1	0	0,185	1,394	2 579 $	1	2 579 $
0,185	0	1	0,324	0,936	3 033 $	2	6 066 $
0,185	0	0	0,185	0,936	1 732 $	6	10 392 $
	2				***Total***	**10**	**23 554$**

On remarque que les accidents affectent le facteur bonus-malus (BMF) de tous les véhicules (effet flotte) alors que les infractions pour excès de vitesse affectent le risque *a priori* via la composante de régression des véhicules qui les accumulent. Le calcul détaillé du BMF pour le cumul d'un accident pour un camion impliqué dans l'accident correspond à :

$$\text{BMF} = \left[\frac{10\times 0,3605+2}{10\times 2,0438+2}\right]\left[\frac{2,0438+1}{0,3605+0,185}\right] = 1,394\,.$$

On note que le BMF est plus élevé pour les véhicules ayant eu un accident que pour ceux qui n'en ont pas eu. Nous remarquons également que la mesure du risque a priori γ_{fi}^{t+1} augmente de façon significative pour les véhicules qui ont accumulé une infraction pour excès de vitesse. Si aucun des 10 véhicules de la flotte n'avait été impliqué dans un accident et n'avait pas eu d'infraction pour excès de vitesse, la prime totale aurait passé de 18 500 $ à 12 230 $ (10×1 223 $), car le BMF serait égal à 0,661 et la prime individuelle à 1 223 $ (0,185×0,661×10 000 $=1 223 $).

$$\text{BMF} = \left[\frac{10\times 0,3605+0}{10\times 2,0438+0}\right]\left[\frac{2,0438+0}{0,3605+0,185}\right] = 0,661\,.$$

Cependant, dans notre exemple, la prime totale passe de 18 500 $ à 23 554 $ suite à l'expérience accumulée des 10 véhicules.

Si, maintenant, le cumul des accidents passés du transporteur est 3, avec 9 camions ne cumulant aucun accident et aucune infraction pour excès de vitesse et 1 camion cumulant 3 accidents et aucune infraction pour excès de vitesse. La prime totale est de 22 407 $. Les primes d'assurance de la flotte pour chacune des expériences sont données au tableau G.

Tableau G : Table de primes d'assurance des véhicules appartenant à une flotte de taille 10 lorsque le cumul des accidents de la flotte est 3

Cumul des accidents	γ_{fi}^{t}	γ_{fi}^{t+1}	BMF	γ_{fi}^{t+1}BMF $\times$ 1 000 \$	*Nombre de camions*	
0	0,185	0,185	1,056	1 954 \$	9	17 586 \$
3	0,185	0,185	2,606	4 821 \$	1	4 821 \$
				Total	**10**	**22 407 \$**

Le calcul détaillé du BMF pour le cumul de 3 accidents est égal à :

$$\mathrm{BMF}=\left[\frac{10\times 0,3605+3}{10\times 2,0438+3}\right]\left[\frac{2,0438+3}{0,3605+0,185}\right]=2,606$$

On remarque que la prime d'un véhicule n'ayant pas d'accident et pas d'infraction pour excès de vitesse est de 1 954 \$ lorsqu'il provient d'une flotte ayant cumulé 3 accidents et passe à 1 732 \$ s'il appartient à une flotte ayant cumulé 2 accidents, tout en ayant les mêmes caractéristiques (Tableau F). Ce résultat est expliqué par le fait que les BMF de tous les véhicules sont affectés par le cumul des accidents de la flotte. On remarque également que cumuler trois accidents augmente davantage la prime d'assurance (4 821 \$) qu'un cumul d'un accident et d'une infraction pour excès de vitesse (4 517 \$) en provenance d'une flotte ayant un cumul de 2 accidents.

4.3.3. Regrouper les véhicules en 2 groupes

Dans cette situation, la prime d'assurance estimée d'un camion *i* appartenant à un transporteur *f* est donnée par :

$$=\hat{\gamma}_{fi}^{t+1}\times\left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\hat{\nu}\right)}{\sum_{j=1}^{t}\hat{b}_{f2}^{j}+\hat{\kappa}^{-1}}\right]\left[\frac{\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+I_f\hat{\kappa}^{-1}}{\sum_{i=1}^{I_f}\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\hat{\nu}\right)}\right]\left[\frac{{}_2F_1\left(\sum_{i=1}^{g}\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\hat{\nu}\right)+1;\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+I_f\hat{\kappa}^{-1}+1;\sum_{i=1}^{I_f}\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\hat{\nu}\right)+1;\frac{\sum_{j=1}^{t}\hat{b}_{f2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\hat{b}_{f1}^{j}}{\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\hat{b}_{f2}^{j}}\right)}{{}_2F_1\left(\sum_{i=1}^{g}\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\hat{\nu}\right);\sum_{i=1}^{I_f}\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+I_f\hat{\kappa}^{-1};\sum_{i=1}^{I_f}\left(\sum_{j=1}^{t}y_{fi}^{j}+\hat{\nu}\right);\frac{\sum_{j=1}^{t}\hat{b}_{f2}^{j}-\sum_{j=1}^{t}\hat{b}_{f1}^{j}}{\hat{\kappa}^{-1}+\sum_{j=1}^{t}\hat{b}_{f2}^{j}}\right)}\right]$$

avec :

$$\hat{b}_{f1}^{j}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{g}\hat{\gamma}_{fi}^{j}}{g}\right)\quad \text{et}\quad \hat{b}_{f2}^{j}=\left(\frac{\sum_{i=g+1}^{I_f}\hat{\gamma}_{fi}^{j}}{I_f-g}\right)$$

où *g* correspond au nombre de camions dans le groupe 1 et où la fonction indicatrice :

$$\mathrm{I} = \begin{cases} 1 & \text{si le camion appartient au groupe 1} \\ 0 & \text{si le camion appartient au groupe 2} \end{cases}.$$

De plus, les résultats du tableau M indiquent que $\hat{\kappa}^{-1} = 0,3605$ et $\hat{\nu} = 2,0438$.

4.3.4. Exemple d'une flotte de 10 camions ayant 2 groupes

Supposons que le cumul des accidents du transporteur durant la prochaine période est 0, avec 4 camions appartenant au groupe 1 et 6 camions au groupe 2. En supposant que le coût moyen des réclamations est de 10 000 $, les primes d'assurance pour chacun des historiques des véhicules de la flotte à la période suivante sont données dans le tableau H .

Tableau H : Table de primes d'assurance des véhicules appartenant à une flotte de taille 10 lorsque le cumul des accidents de la flotte est 0

$\hat{b}^{t}_{fi}$	*Cumul des accidents*	γ^{t+1}_{fi}	BMF	γ^{t+1}_{fi}BMF × 10 000 $	*Nombre de camions*	
0,1305	0	0,1305	0,669	873 $	4	3 492 $
0,2331	0	0,2331	0,643	1 499 $	6	8 994 $
	0			***Total***	**10**	**12 486 $**

Le calcul détaillé du BMF pour un camion appartenant au groupe 1 correspond à :

$$\mathrm{BMF} = \left[\frac{0+2,0438}{0,2331+0,3605}\right]\left[\frac{10\times 0,3605+0}{10\times 2,0438+0}\right]\left[1,1022\right] = 0,669\,,$$

et celui pour un camion appartenant au groupe 2 est donné par

$$\mathrm{BMF} = \left[\frac{0+2,0438}{0,2331+0,3605}\right]\left[\frac{10\times 0,3605+0}{10\times 2,0438+0}\right]\left[1,0589\right] = 0,643\,.$$

Si, maintenant, le cumul des accidents de la flotte est de 1 et que le véhicule accidenté appartient au groupe 2, les primes d'assurance des véhicules de la flotte sont données au tableau I.

Tableau I : Table de primes d'assurance des véhicules appartenant à une flotte de taille 10 lorsque le cumul des accidents de la flotte est 1 (dans le groupe 2)

$\hat{b}_{fi}^{t}$	*Cumul des accidents*	γ_{fi}^{t+1}	BMF	γ_{fi}^{t+1}BMF $\times$ 10 000 \$	*Nombre de camions*	
0,1305	0	0,1305	0,816	1 065 \$	4	4 260 \$
0,2331	0	0,2331	0,779	1 816 \$	5	9 080 \$
0,2331	1	0,2331	1,160	2 704 \$	1	2 704 \$
	1			***Total***	**10**	**16 044 \$**

Le calcul détaillé du BMF pour un camion appartenant au groupe 1 correspond à :

$$\text{BMF} = \left[\frac{0+2,0438}{0,2331+0,3605}\right]\left[\frac{10\times 0,3605+1}{10\times 2,0438+1}\right]\left[1,1039\right] = 0,816 .$$

Celui d'un camion appartenant au groupe 2 et n'ayant eu aucun accident est donné par :

$$\text{BMF} = \left[\frac{0+2,0438}{0,2331+0,3605}\right]\left[\frac{10\times 0,3605+1}{10\times 2,0438+1}\right]\left[1,0536\right] = 0,779 ,$$

alors que celui d'un camion du groupe 2 ayant eu 1 accident est égal à

$$\text{BMF} = \left[\frac{1+2,0438}{0,2331+0,3605}\right]\left[\frac{10\times 0,3605+1}{10\times 2,0438+1}\right]\left[1,0536\right] = 1,160 .$$

Par contre, si le véhicule accidenté appartient au groupe 1, nous avons les valeurs du tableau J.

Tableau J : Table de primes d'assurance des véhicules appartenant à une flotte de taille 10 lorsque le cumul des accidents de la flotte est 1 (dans le groupe 1)

$\hat{b}_{fi}^{t}$	*Cumul des accidents*	γ_{fi}^{t+1}	BMF	γ_{fi}^{t+1}BMF $\times$ 10 000 \$	*Nombre de camions*	
0,1305	0	0,1305	0,822	1 101 \$	3	3 303 \$
0,1305	1	0,1305	1,224	1 597 \$	1	1 597 \$
0,2331	0	0,2331	0,784	1 828 \$	6	10 968 \$
	1			***Total***	**10**	**15 868 \$**

Le calcul détaillé du BMF pour un camion appartenant au groupe 1 correspond à :

$$\text{BMF} = \left[\frac{0+2,0438}{0,2331+0,3605}\right]\left[\frac{10\times 0,3605+1}{10\times 2,0438+1}\right]\left[1,1114\right] = 0,822$$

et celui d'un camion du groupe 1 ayant eu 1 accident est égal à :

$$\text{BMF} = \left[\frac{0+2,0438}{0,2331+0,3605}\right]\left[\frac{10\times 0,3605+1}{10\times 2,0438+1}\right]\left[1,1114\right] = 1,224\,.$$

Finalement, le BMF d'un camion appartenant au groupe 2 est donné par :

$$\text{BMF} = \left[\frac{0+2,0438}{0,2331+0,3605}\right]\left[\frac{10\times 0,3605+1}{10\times 2,0438+1}\right]\left[1,0604\right] = 0,784\,.$$

Le tableau K résume l'ensemble des cas.

Tableau K : Table de primes d'assurance des véhicules appartenant à une flotte de taille 10 séparés en deux groupes de risque

Accidents de la flotte	$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{10} y_{fi}^{j} = 0$		$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{10} y_{fi}^{j} = 1$				$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{10} y_{fi}^{j} = 2$					
Accidents du groupe 1	$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{4} y_{fi}^{j} = 0$		$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{4} y_{fi}^{j} = 0$		$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{4} y_{fi}^{j} = 1$		$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{4} y_{fi}^{j} = 0$		$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{4} y_{fi}^{j} = 1$		$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{4} y_{fi}^{j} = 2$	
γ_{fi}^{t+1}	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$	BMF	γ_{fi}^{t+1} BMF × 10 000 \$
Groupe 1 0,1305												
$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 0$	0,669	873 \$	0,816	1 065 \$	0,822	1 101 \$	0,951	1 241 \$	0,957	1 249 \$	0,963	1 257 \$
$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 1$					1,224	1 597 \$			1,425	1 860 \$	1,434	1 871 \$
$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 2$											1,893	2 470 \$
Groupe 2 0,2331												
$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 0$	0,643	1 499 \$	0,779	1 816 \$	0,784	1 828 \$	0,902	2 103 \$	0,908	2 117 \$	0,913	2 218 \$
$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 1$			1,160	2 704 \$			1,344	3 133 \$	1,352	3 152 \$		
$\sum_{j=1}^{t} y_{fi}^{j} = 2$							1,785	4 161 \$				

5. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons développé un modèle paramétrique de tarification des primes d'assurance pour les flottes de véhicules. Nous avons montré comment la prise en compte des effets flottes et véhicules pouvait affecter le calcul bayésien des primes d'assurance dans le temps. Le modèle proposé a été estimé avec des données sur une seule période. Une extension importante serait de modéliser un effet panel qui tiendrait compte des répétitions dans le temps des informations sur les flottes et sur les véhicules (voir Abowd et al., 1999, pour une première analyse).

La formule de tarification développée présuppose une décentralisation de la gestion de la sécurité routière à l'égard des transporteurs. En effet, charger des primes différentes pour chacun des véhicules d'une flotte en fonction de l'expérience de la flotte et des camions incite les gestionnaires de la sécurité routière à suivre eux-mêmes la politique de sécurité routière et à mettre en place des incitatifs dans l'entreprise qui motiveront les conducteurs et les transporteurs à être prudents. En effet, ces gestionnaires connaissent les conducteurs des camions à risque et peuvent donc attribuer les différents risques de variation de primes aux différents conducteurs de camions.

6. RÉFÉRENCES

Abowd J-M., F. Kramarz, D.N. Margolis (1999) « High Wage Workers and High Wage Firms », *Econometrica*, 251-333.

Angers J-F., D. Desjardins, G. Dionne (2003) « Vehicle and Fleet Random Effects on Insurance Rating » Document de recherche, CRT et Chaire de gestion des risques, HEC Montréal. (en préparation).

Buhlmann H. (1997) « Experience Rating and Credibility » *Astin Bulletin* 4, 199-207.

Dionne G., D. Desjardins, J. Pinquet (2001a) « Experience Rating Schemes for Fleets of Vehicles » *Astin Bulletin* 31, 1, 85-109.

Dionne G., D. Desjardins, M.G. Ingabire, R. Akdim (2001b) « La perception du risque d'être arrêté chez les camionneurs et transporteurs routiers ». Rapport de recherche 2001-05, Laboratoire sur la sécurité des transports du Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, 139 p.

Dionne G., D. Desjardins, J. Pinquet (1999a) « L'évaluation du risque d'accident des transporteurs en fonction de leur secteur d'activité, de la taille de leur flotte et de leur dossier d'infractions ». Rapport de recherche 99-28, Laboratoire sur la sécurité des transports du Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, 154 p.

Dionne G., C. Laberge-Nadeau, D. Desjardins, S. Messier, U. Maag (1999b) « Analysis of the Economic Impact of Medical and Optometric Driving Standards on Costs Incurred by Trucking Firms and on the Social Cost of Traffic Accidents », dans *Automobile Insurance: Road Safety, New Drivers, Risks, Insurance Fraud and Regulation*, G. Dionne and C. Laberge-Nadeau (Eds.), Kluwer, Boston, 323-351.

Dionne G., C. Laberge-Nadeau, D. Desjardins, S. Messier, C. Vanasse (1995) « Analyse des facteurs qui expliquent les taux et les gravités des accidents routiers impliquant des chauffeurs professionnels au Québec », *Études et recherches*, Rapport R-111, Institut de recherche en santé et en sécurité du travail du Québec, 84 p.

Dionne G., C. Vanasse (1992) « Automobile Insurance Ratemarking in the Presence of Asymmetrical Information », *Journal of Applied Econometrics* 7, 149-165.

Dionne G., C. Vanasse (1989) « A Generalization of Automobile Insurance Rating Models: The Negative Binomial Distribution with a Regression Component », *Astin Bulletin* 19, 199-212.

Frangos N., S.D. Vrontos (2001) « Design of Optimal Bonus-Malus Systems with a Frequency and a Security Component on an Individual Basis in Automobile Insurance », *Astin Bulletin* 31, 1-22.

Fluet C. (1999) « Commercial Vehicle Insurance: Should Fleet Policies Differ From Single Vehicule Plans? », dans *Automobile Insurance: Road Safety, New Drivers, Risks, Insurance Fraud and Regulation*, G. Dionne et C. Laberge-Nadeau (Eds.), Kluwer Academic Press, 101-117.

Gouriéroux C. (1999) *Statistiques de l'assurance*, Economica, 297 pages.

Hausman J.A., B.H. Hall, Z. Griliches (1984) « Econometric Models for Count Data with an Application to the Patents – R&D Relationship », *Econometrica* 52, 909-938.

Lange K. (1999) *Numerical Analysis for Statisticians*, Springer, New York, section 21.2, 198-189.

Lawless, J.F. (1987) « Negative Binomial and Mixed Poisson Regression », *Canadian Journal of Statistics* 15, 3, 209-225.

Lemaire J. (1985) *Automobile Insurance: Actuarial Models*, Huebner International Series on Risk, Insurance and Economic Security, Kluwer Academic Publishers, Boston, 248 p.

Lemaire J. (1995) *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 283 p.

Lemire A.M. (1997) « Estimation du kilométrage moyen annuel des poids lourds Québécois », comptes-rendus de la X^{e} Conférence canadienne multidisciplinaire sur la sécurité routière, 8 au 11 juin, 149-158.

Liang K.Y. and Zeger S.L. (1986) « Longitudinal data analysis using generalized linear models » *Biometrika* 73, 13-22.

Mailhot Guy (2001) « Rapport sur la mise en œuvre et les premiers effets de la Loi concernant les propriétaires et exploitants de véhicules lourds », Ministère des Transports du Québec, Commission des transports du Québec et la Société de l'assurance automobile du Québec, 42 p.

Marie-Jeanne, P. (1994) « Problèmes spécifiques des flottes automobiles », Proceedings of the ISUP conference « Cours Avancé sur l'Assurance Automobile ».

Ministère des Transports du Québec (1996) « État de la situation des conducteurs professionnels de l'industrie du transport routier au Québec », rapport final, Recherche Affaires Publiques et Sociales, 7055.005 - 03/96, 93 p.

Moses L. N., I. Savage (1994) « The Effect of Firm Characteristics on Truck Accidents », *Accident Analysis & Prevention* 26, 2, 173-179.

Moses L. N., I. Savage (1996) « Identifying Dangerous Trucking Firm », *Risk Analysis* 16, 3, 359-366.

Pinquet J. (1997) « Allowance for Cost of Claims in Bonus-Malus Systems », *Astin Bulletin* 27, 1, 33-57.

Pinquet J. (1998) « Designing Optimal Bonus-Malus Systems from Different Types of Claims », *Astin Bulletin* 28, 2, 205-220.

Pinquet J. (2000) « Experience Rating Trough Heterogeneous Models », dans *Handbook of Insurance*, G. Dionne (Ed.), Kluwer Academic Publishers, 459-500.

Purcaru O., M. Denuit (2003) « Dependence in Dynamic Claim Frequency Credibility Models », *Astin Bulletin* 33, 1, 23-40.

Société de l'assurance automobile du Québec (SAAQ) (1999) « Politique d'évaluation des propriétaires et des exploitants de véhicules lourds », Direction des communications, 107 p.

Société de l'assurance automobile du Québec (SAAQ) (1998) Dossier statistique, « Bilan 1997 des taxis, des autobus et des camions et tracteurs routiers », Service des études et des stratégies en sécurité routière, Direction de la planification et de la statistique, 166 p.

Teugels J.L. and Sundt B. (1991) « A Stop-Loss Experience Rating Scheme for Fleets of Cars », *Insurance: Mathematics and Economics*, North-Holland, 173-179.

Winter, R. (2000) « Optimal Insurance Under Moral Hazard », dans *Handbook of Insurance*, G. Dionne (Ed.), Kluwer Academic Publishers, 155-184.

7. ANNEXES

Tableau L : Estimation des paramètres pour prédire le nombre d'accidents des camions pour les flottes de taille 1 (Binomial négative) et pour les flottes de taille 2

Variables explicatives	Flottes de taille 1			Flottes de taille 2		
	Coefficient	**Statistique *t***	**P**	**Coefficient**	**Statistique *t***	**P**
Constante	-2,9651	-22,237	< ,001	-3,0029	-14,334	< ,001
Nombre d'années en tant que transporteur au 31 décembre 1998	-0,0666	-10,067	< ,001	-0,0399	-3,671	< ,001
Secteur d'activité en 1998						
Transport par autobus	-0,1032	-0,267	,790	-2,0364	-1,852	,064
Camionnage public général	-0,5963	-2,312	,021	0,2564	1,211	,226
Camionnage public en vrac		Groupe de référence			Groupe de référence	
Camionnage pour compte propre	-0,0716	-0,439	,661	0,0267	0,201	,841
Entreprise de location à court terme	0,8582	1,470	,142	0,0757	0,097	,923
Nombre de jours où l'autorisation de circuler est active en 1997	1,7186	14,720	< ,001	1,5216	8,551	< ,001
Nombre d'infractions relatives à la politique de conformité commises en 1997						
Pour surcharge	0,2319	2,790	,005	0,2970	2,412	,016
Pour dimension excédentaire	-0,1161	-0,151	,880	0,3417	0,300	,764
Pour arrimage inadéquat	0,2604	0,582	,561	0,9970	2,510	,012
Pour non-respect des heures de conduite	0,2544	0,458	,647	-0,1437	-0,200	,842
Pour non-respect de la vérification mécanique	0,6238	3,088	,002	0,3201	1,040	,298
Pour autres raisons	-0,5253	-0,686	,493	0,3518	0,445	,656
Type d'utilisation du véhicule						
Utilisation commerciale incluant le transport des biens sans permis C.T.Q.	-0,1660	-1,016	,340	-0,2384	-1,727	,084
Transport de biens autre que « vrac »	0,5366	2,154	,031	-0,2303	-1,023	,306
Transport de matières en « vrac »		Groupe de référence			Groupe de référence	
Type de carburant						
Diesel		Groupe de référence			Groupe de référence	
Essence	-0,4763	-7,492	< ,001	-0,4120	-3,951	< ,001
Autres	0,2869	0,770	,441	-1,2034	-1,175	,240
Nombre de cylindres						
1 à 5 cylindres	0,2009	1,396	,163	-0,1424	-0,529	,597
6 à 7 cylindres	0,3246	5,106	< ,001	0,2681	2,921	,003
8 ou plus de 10 cylindres		Groupe de référence			Groupe de référence	
Nombre d'essieux						
2 essieux (3 000 à 4 000 kg)	-0,5123	-5,944	< ,001	-0,3462	-2,539	,011
2 essieux (Plus de 4 000 kg)	-0,5741	-7,800	< ,001	-0,4131	-3,863	< ,001
3 essieux	-0,4773	-6,894	< ,001	-0,3531	-3,489	< ,001
4 essieux	-0,1573	-1,550	,121	-0,1074	-0,701	,483
5 essieux	-0,3896	-4,968	< ,001	-0,2451	-2,068	,039
6 essieux ou plus		Groupe de référence			Groupe de référence	
Nombre d'infractions entraînant des points d'inaptitudes commises en 1997						
Pour excès de vitesse	0,2557	5,780	< ,001	0,3892	5,988	<, 001
Pour conduite durant sanction	0,8869	4,778	< ,001	-0,1489	-0,322	,748
Pour omission de se conformer à un feu rouge	1,0269	9,726	< ,001	0,7059	3,662	< ,001
Pour panneau d'arrêt ou signaux d'agent	0,5480	4,565	< ,001	0,5269	2,591	,010
Pour omission de porter la ceinture	0,4749	2,889	,039	0,4757	1,933	,053
Autres infractions	1,9662	12,589	< ,001	1,4936	6,000	< ,001
ν				3,3067	1,800	,072
κ^{-1}	0,9680	8,628	< ,001	0,6886	5,581	< ,001
Log de la vraisemblance		-9 609			-4 051	
Nombre de transporteurs routiers		30 520			6 128	
Nombre de véhicules		30 520			12 256	

Tableau M : Estimation des paramètres pour prédire le nombre d'accidents des camions pour l'ensemble des flottes en divisant les camions en deux groupes pour les flottes de taille supérieure à 2 camions

Variables explicatives	**Ensemble des flottes**		
	Coefficient	**Statistique *t***	**P**
Constante	-3,0127	-37,145	< ,001
Nombre d'années en tant que transporteur au 31 décembre 1998	-0,0505	-12,383	< ,001
Secteur d'activité en 1998			
Transport par autobus	-0,4860	-2,044	,041
Camionnage public général	-0,0755	-0,873	,383
Camionnage public en vrac	Groupe de référence		
Camionnage pour compte propre	0,0122	0,199	,842
Entreprise de location à court terme	0,1849	2,040	,041
Taille de la flotte			
1	Groupe de référence		
2	0,0493	1,221	,222
3	0,2226	4,906	< ,001
4 à 5	0,2611	6,179	< ,001
6 à 9	0,3622	8,656	< ,001
10 à 19	0,4571	11,402	< ,001
20 à 49	0,4613	10,739	< ,001
50 à 149	0,5909	12,501	< ,001
150 à 400	0,2939	5,326	< ,001
Plus de 400	0,2854	4,972	< ,001
Nombre de jours où l'autorisation de circuler est active en 1997	1,2476	18,457	< ,001
Nombre d'infractions relatives à la politique de conformité commises en 1997			
Pour surcharge	0,2439	4,411	< ,001
Pour dimension excédentaire	0,2748	0,505	,614
Pour arrimage inadéquat	0,6152	3,428	,001
Pour non-respect des heures de conduite	0,3496	1,567	,117
Pour non-respect de la vérification mécanique	0,4926	3,923	< ,001
Pour autres raisons	0,0333	0,099	,922
Type d'utilisation du véhicule			
Utilisation commerciale incluant le transport des biens sans permis C.T.Q.	-0,1509	-2,300	,021
Transport de biens autre que « vrac »	-0,0256	-0,273	,785
Transport de matières en « vrac »	Groupe de référence		
Type de carburant			
Diesel	Groupe de référence		
Essence	-0,5348	-11,592	< ,001
Autres	-0,1323	-0,654	,513
Nombre de cylindres			
1 à 5 cylindres	0,1880	1,615	,106
6 à 7 cylindres	0,4464	10,801	< ,001
8 ou plus de 10 cylindres	Groupe de référence		
Nombre d'essieux			
2 essieux (3 000 à 4 000 kg)	-0,1075	-1,946	,052
2 essieux (Plus de 4 000 kg)	-0,1280	-3,062	,002
3 essieux	-0,1858	-4,439	< ,001
4 essieux	-0,2427	-3,974	< ,001
5 essieux	-0,2630	-5,530	< ,001
6 essieux ou plus	Groupe de référence		
Nombre d'infractions entraînant des points d'inaptitudes commises en 1997			
Pour excès de vitesse	0,3344	10,824	< ,001
Pour conduite durant sanction	0,5793	3,746	< ,001
Pour omission de se conformer à un feu rouge	1,0547	12,882	< ,001
Pour panneau d'arrêt ou signaux d'agent	0,5988	6,392	< ,001
Pour omission de porter la ceinture	0,3656	2,936	< ,001
Autres infractions	1,3875	13,959	< ,001
ν	2,0438	11,086	< ,001
κ^{-1}	0,3605	21,329	< ,001
Log de la vraisemblance	-40 583		
Nombre de transporteurs routiers	43 679		
Nombre de véhicules	103 848		